MATEMATIČKI KLOKAN 2015. J
RJEŠENJA

Pitanja za 3 boda:

1. Koji je od navedenih brojeva najbliži produktu $20.15 \cdot 51.02$?

   A) 100 B) 1000 C) 10000 D) 100000 E) 1000000

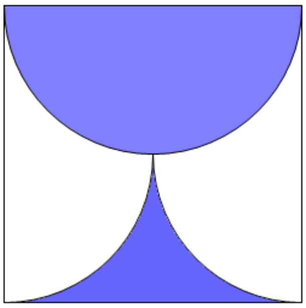
   Rješenje: B

2. Majka je oprala rublje i stavila majice sušiti jednu do druge na konopac. Zatim je zamolila svoju djecu da između svake dvije majice stave po jednu čarapu. Sada je na konopcu 29 komada odjeće. Koliko je majica na konopcu?

   A) 10 B) 11 C) 13 D) 14 E) 15

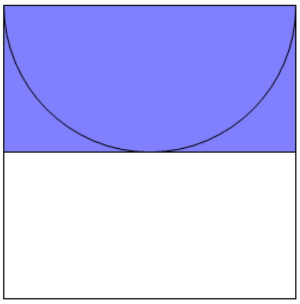
   Rješenje: E
   Ako oduzmemo jednu majicu (s jednog kraja) onda na konopcu imamo isti broj majica i čarapa (npr. MČMČMČ...). Dakle, imamo $28 : 2 = 14$ čarapa i 15 majica.

3. Ispunjeni dio kvadrata stranice a omeđen je polukružnicom te s dvije četvrtine kružnice. Kolika je površina tog dijela?



   A) $\frac{\pi a^2}{8}$ B) $\frac{a^2}{2}$ C) $\frac{\pi a^2}{2}$ D) $\frac{a^2}{4}$ E) $\frac{\pi a^2}{4}$

   Rješenje: B
   Premjestimo li dijelove kao na slici očito je da je površina ispunjenog dijela jednaka polovici površine kvadrata.

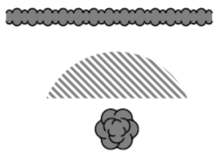
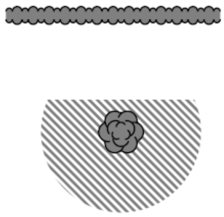
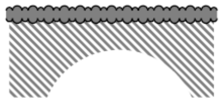
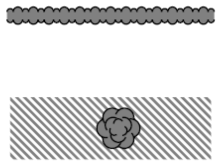
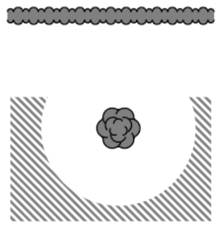


4. Tri sestre, Ana, Beta i Sanda, kupile su vrećicu koja sadrži 30 keksića. Svaka je dobila 10 keksića. Međutim, Ana je u kupovini sudjelovala s 8 kn, Beta s 5 kn i Sanda s 2 kn. Da su keksiće podijelile proporcionalno s novcima koje je svaka sestra dala, koliko je još keksića trebala dobiti Ana?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Rješenje: E
Keksiće su trebale podijeliti u omjeru $8 : 5 : 2$ tj. Ana je trebala dobiti $8k$ keksića, Beta $5k$, a Sanda $2k$. Iz $8k + 5k + 2k = 30$ slijedi $k = 2$. Ana je trebala dobiti 16 keksića, dakle još 6 njih.

5. Gospodin Skrivečki želi iskopati blago koje je zakopao u svom vrtu prije nekoliko godina. Sjeća se samo da je blago zakopao najmanje 5 m daleko od živice i najviše 5 m daleko od panja starog stabla kruške. Koja od slika prikazuje područje na kojem gospodin Skrivečki treba tražiti svoje blago?

A)

B)

C)

D)

E)


Rješenje: B
Radi se o području unutar kružnice sa središtem u panju radijusa 5 m, a "ispod" pravca koji je od živice udaljen 5 m.

6. U razredu su 33 učenika. Njihovi omiljeni predmeti su Informatika i Tjelesna i zdravstvena kultura (TZK). Troje učenika voli oba predmeta. Dvostruko je više učenika koji vole samo Informatiku od onih koji vole samo TZK. Koliko učenika voli Informatiku?

A) 15 B) 18 C) 20 D) 22 E) 23

Rješenje: E
Neka je k broj učenika ovog razreda koji vole samo TZK. Onda učenika koji vole samo Informatiku ima $2k$ te vrijedi $k + 2k + 3 = 33$. Dakle, $k = 10$. Učenika koji vole Informatiku ima $2k + 3 = 23$.

7. Koji od navedenih brojeva nije niti kvadrat niti kub nekog prirodnog broja?

A) 6^{13} B) 5^{12} C) 4^{11} D) 3^{10} E) 2^9

Rješenje: A

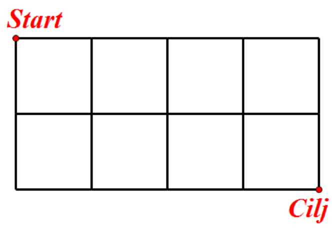
8. Gospodin Vosak kupio je 100 svijeća. On svaki dan iskoristi jednu svijeću i uvijek napravi jednu novu od voska sedam iskorištenih svijeća. Nakon koliko će dana morati opet u kupovinu novih svijeća?

A) 112 B) 114 C) 115 D) 116 E) 117

Rješenje: D
Od iskorištenih 100 svijeća gospodin Vosak će napraviti $100 : 7 = 14$ novih svijeća (2 neće ovaj put iskoristiti). Kada iskoristi tih 14 od preostalog voska može napraviti još $16 : 7 = 2$ svijeće (opet mu ostaje vosak 2 svijeće). Sada, nakon $100 + 14 + 2 = 116$ dana ponovo mora u kupovinu svijeća.

Pitanja za 4 boda:

9. Duljina stranice jednog kvadratića na slici je 1. Kolika je najmanja udaljenost koju treba "prošetati" od "Start" do "Cilj" ako se možemo kretati samo po stranicama ili dijagonalama kvadratića?



A) $2\sqrt{5}$ B) $\sqrt{10}+\sqrt{2}$ C) $2+2\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) 6

Rješenje: C
Moramo prijeći dvije stranice (duljine 1) i dvije dijagonale (duljine $\sqrt{2}$) tj. $2+2\sqrt{2}$.

10. Svaki stanovnik planeta Winger ima barem dva uha. Tri stanovnika, Imi, Dimi i Trimi, susreli su se u krateru. Imi reče: "Vidim 8 ušiju." Dimi: "Vidim 7 ušiju." Trimi: "To je čudno, ja vidim samo 5 ušiju." Nijedan od njih ne vidi vlastite uši. Koliko ušiju ima Trimi?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

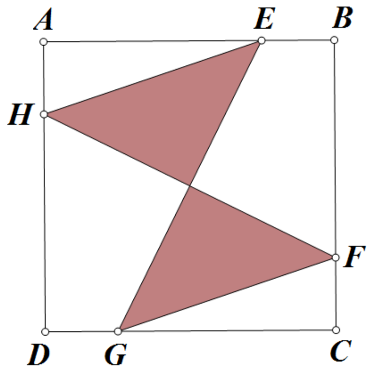
Rješenje: C
Označimo s I broj Imijevih ušiju, s D broj Dimijevih ušiju i s T broj Trimijevih ušiju. Imamo: $D+T=8$, $I+T=7$, $I+D=5$. Zbrojimo li ove tri jednadžbe te ih podijelimo s 2 vidimo da je ukupan broj njihovih ušiju $I+D+T=10$. Sada lako odredimo broj Trimijevih ušiju: $T=10-(I+D)=10-5=5$.

11. Posuda oblika uspravne prizme kojoj je baza kvadrat stranice 10 cm napunjena je vodom do visine h cm. U nju je uronjena kocka duljine brida 2 cm. Koja je najmanja vrijednost broja h za koji će kocka biti potpuno pod vodom?

A) 1.92 B) 1.93 C) 1.9 D) 1.91 E) 1.94

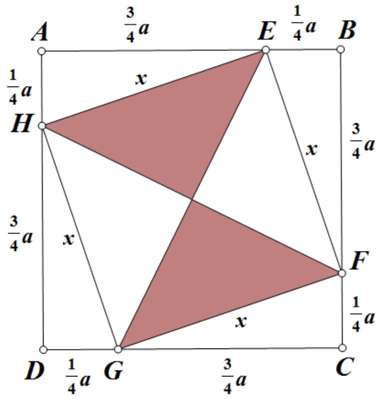
Rješenje: A
Volumen kocke je $2^3=8\text{ cm}^3$. Nakon što uronimo kocku u posudu visina vode treba biti jednaka visini kocke (2 cm) pa je volumen vode i kocke zajedno $10^2\cdot 2=200\text{ cm}^3$. Oduzmemo li od tog broja volumen kocke dobit ćemo volumen vode: $200-8=192\text{ cm}^3$. Iz tog volumena sada računamo $h=\frac{192}{10^2}=1.92$ cm. (Volumen prizme: $V=B\cdot h$.)

12. Kvadrat $ABCD$ ima površinu 80. Točke E, F, G i H nalaze se na stranicama kvadrata i vrijedi $|AE| = |BF| = |CG| = |DH|$. Ako je $|AE| = 3|EB|$ kolika je površina ispunjenog dijela?



A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

Rješenje: B



Neka je a duljina stranice kvadrata $ABCD$, a $x = |EF| = |FG| = |GH| = |HE|$.

Površina ispunjenog dijela pola je površine kvadrata $EFGH$ tj. $\frac{x^2}{2}$.

Po Pitagorinom poučku vrijedi $x^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{5a^2}{8}$.

Znamo da površina kvadrata $ABCD$ iznosi $a^2 = 80$ pa je $x^2 = \frac{5 \cdot 80}{8} = 50$, a površina ispunjenog dijela 25.

13. Danas je umnožak dobi oca i sina 2015. Koliko godina je razlika među njima?

A) 26 B) 29 C) 31 D) 34 E) 36

Rješenje: D

Rastavljen na proste faktore $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Kombinacija koja ima smisla jeste da otac ima $5 \cdot 13 = 65$, a sin 31 godinu. Razlika među njima je 34 godine.

14. Ako su rješenja jednadžbe $x^2 - 85x + c = 0$ prosti brojevi, koliko iznosi suma znamenaka broja c?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 21

Rješenje: B

Iz Vieteovih formula imamo: $x_1 \cdot x_2 = c$, $x_1 + x_2 = 85$. Prosti brojevi koji zbrojeni daju 85 su 2 i 83 pa je $c = 2 \cdot 83 = 166$. Suma znamenaka je 13.

15. Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je razlika svake dvije susjedne znamenke 3?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 20 E) 27

Rješenje: D

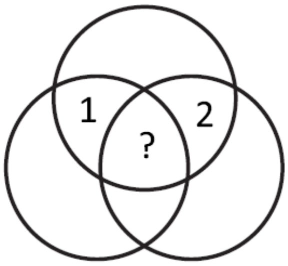
16. Koji je od navedenih brojeva protuprimjer izjavi "Ako je n prost broj onda je točno jedan od brojeva $n-2$ i $n+2$ prost."?

A) $n = 11$ B) $n = 19$ C) $n = 41$ D) $n = 29$ E) $n = 37$

Rješenje: E

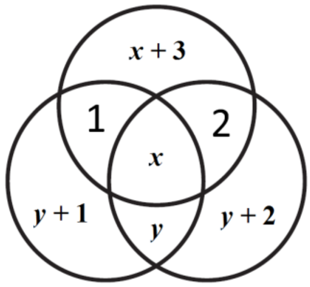
Pitanja za 5 bodova:

17. Na donjoj slici je sedam područja. U svakom području zapisan je jedan broj. Broj u svakom području jednak je sumi brojeva iz svih susjednih područja. (Dva su područja susjedna ako njihove granice imaju više od jedne zajedničke točke.) Poznata su dva broja. Koji broj je zapisan u središnjem području?



A) 0 B) -3 C) 3 D) -6 E) 6

Rješenje: A



Označimo li broj zapisan u središnjem području sa x imamo situaciju kao na slici desno. Znamo da vrijedi i $x = 1 + 2 + y$ te $y = y + 1 + x + y + 2$ tj. imamo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x = 3 + y \\ y = 2y + x + 3 \end{cases}$$

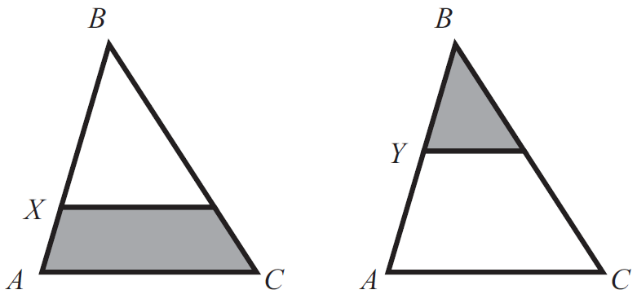
čije je rješenje $x = 0$, $y = -3$.

18. Koliko se dvoznamenkastih brojeva može zapisati kao suma točno šest različitih potencija broja 2 (uključujući 2^0)?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

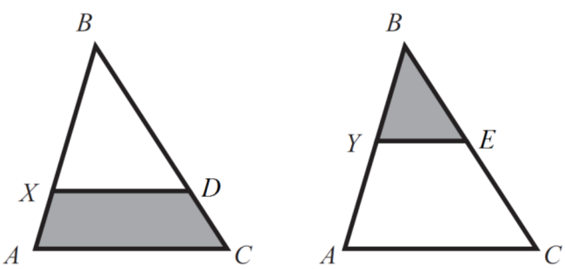
Rješenje: C
63 i 95

19. U trokutu ABC možemo povući paralelu s osnovicom AC kroz točku X ili Y. Površine ispunjenih dijelova su jednake. Omjer $|BX| : |XA| = 4 : 1$. Koliki je omjer $|BY| : |YA|$?



A) $1 : 1$ B) $2 : 1$ C) $3 : 1$ D) $3 : 2$ E) $4 : 3$

Rješenje: D

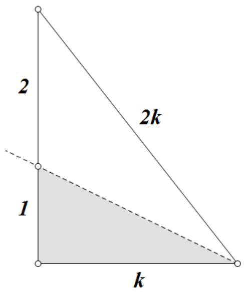


Trokuti ABC i XBD su slični s koeficijentom sličnosti $\frac{4}{5}$.
Označimo površinu trokuta ABC s p. Tada je površina trokuta XBD jednaka $\left(\frac{4}{5}\right)^2 p$, a površina četverokuta $AXDC$ iznosi $p - \left(\frac{4}{5}\right)^2 p = \frac{9}{25} p = \left(\frac{3}{5}\right)^2 p$.
Trokuti ABC i YBE su slični s koeficijentom sličnosti k, tj. površina trokuta YBE iznosi $k^2 p$. Kako su površine četverokuta $AXDC$ i trokuta YBE jednake očito je $k = \frac{3}{5}$.
Stoga je omjer $|BY| : |YA| = 3 : 2$.

20. U pravokutnom trokutu simetrala šiljastog kuta dijeli nasuprotnu stranicu na segmente duljina 1 i 2. Kolika je duljina dijela simetrale unutar trokuta?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

Rješenje: C



Jedna kateta ovog trokuta očito je duljine 3.
Poučak o simetrali kuta u trokutu kaže da simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom trokutu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica.
To znači da je druga kateta duljine k, a hipotenuza $2k$ (hipotenuza je dulja od katete).
Iz Pitagorinog poučka imamo $(2k)^2 = 3^2 + k^2$ iz čega slijedi da je $k = \sqrt{3}$.
Opet primjenog Pitagorinog poučka na ispunjeni pravokutni trokut dobivamo $s = 2$.

21. Kada je jedan od brojeva 1, 2, 3,..., $n-1$, n izbačen, aritmetička sredina preostalih brojeva bila je 4.75. Koji broj je izbačen?

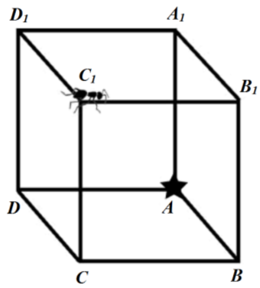
A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) Nije moguće odrediti.

Rješenje: B
Označimo s k izbačeni broj, $k \in \mathbb{N}$ i $k \leq n$. Suma preostalih $n-1$ brojeva tada je $\frac{n(n+1)}{2} - k$ pa je aritmetička sredina tih brojeva $\frac{\frac{n(n+1)}{2}-k}{n-1} = 4.75$. Izrazimo k iz te jednakosti: $k = \frac{n(n+1)}{2} - 4.75(n-1)$. Kako je broj $\frac{n(n+1)}{2}$ prirodan za prirodne brojeve n, broj $n-1$ treba biti djeljiv sa 4 da bi k bio prirodan broj.
Za $n-1=4$ dobijemo negativan k pa to nije rješenje.
Za $n-1=8$ dobijemo $k=7$ i to je rješenje.

22. Mrav Ola počinje šetati iz jednog vrha kocke čija je duljina brida 1. Ona želi prošetati svim bridovima kocke i vratiti se u početnu točku i to tako da duljina njenog puta bude najkraća moguća. Kolika je duljina njezina puta?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 20

Rješenje: D



Iz svakog od 8 vrhova kocke izlaze 3 brida. Da bi obišli sve bridove morat ćemo svaki vrh posjetiti dva puta. Duljina Olinog puta stoga ne može biti kraća od 16.
Označimo li vrhove kocke sa $ABCDA_1B_1C_1D_1$ moguća šetnja duljine 16 počevši iz vrha A je
$B - B_1 - B - C - C_1 - C - D - D_1 - D - A - A_1 - D_1 - C_1 - B_1 - A_1 - A$.

23. Zapisano je deset različitih brojeva. Podcrtamo svaki broj koji je jednak produktu preostalih devet brojeva. Koliko najviše brojeva može biti podcrtano?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 9 E) 10

Rješenje: B
Sigurno može biti podcrtan jedan broj (npr. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 362880).
Mogu biti podcrtana i dva broja ukoliko se radi o suprotnim brojevima, a umnožak preostalih 8 brojeva je -1 (npr. -2 0.5 4 0.25 8 0.125 10 0.1 9 -9).
Pretpostavimo da možemo podcrtati tri broja a, b i c. Označimo umnožak preostalih 7 brojeva s x. Tada vrijedi: $a = bcx$, $b = acx$, $c = abx$. Iz toga slijedi (ako izrazimo x iz sve tri jednadžbe) $\frac{a}{bc} = \frac{b}{ac} = \frac{c}{ab}$.
Pomnožimo li ovu jednakost sa abc (nijedan od podcrtanih brojeva ne može biti 0) imamo: $a^2 = b^2 = c^2$ što je u kontradikciji sa činjenicom da su zapisani različiti brojevi. Ne mogu biti podcrtana tri broja.

24. Nekoliko točaka je označeno na pravcu. Konstruirane su dužine kroz svake dvije točke. Jedna od točaka leži na 80 tih dužina, a druga na 90 dužina (ne računajući dužine kojima je ta točka krajnja). Koliko je točaka označeno na pravcu?

A) 20 B) 22 C) 80 D) 90 E) Nije moguće odrediti.

Rješenje: B

Gledamo li jednu od označenih točaka uočavamo da ona leži na $k \cdot l$ konstruiranih dužina (ne računajući dužine kojima je ta točka krajnja), gdje je k broj točaka lijevo od točke koju promatramo, a l broj točaka desno od nje. Ukupan broj označenih točaka u tom je slučaju $k + 1 + l$.

Raspišimo u obliku tablica sve mogućnosti da točka leži na 80, odnosno 90 konstruiranih dužina (za $k \leq l$):

k	l	$k+1+l$
1	80	82
2	40	43
4	20	25
5	16	22
8	10	19

k	l	$k+1+l$
1	90	92
2	45	48
3	30	34
5	18	24
6	15	22
9	10	20

Vidimo da se broj označenih točaka poklapa samo za 22 pa je to rješenje.