STRUČNA SEKCIJA HRVATSKOGA MATEMATIČKOG DRUŠTVA

STRUČNO-METODIČKA PREDAVANJA

USPOREDBA KVANTITATIVNIH EFEKATA DVAJU KLASIČNIH MODELA OTPLATE ZAJMA

mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač,
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb

1. MODEL OTPLATE ZAJMA NOMINALNO JEDNAKIM RATAMA (MODEL A)

- zajam se otplaćuje nominalno jednakim ratama krajem svakoga obračunskoga razdoblja (najčešće: mjesečno)
- krajem svakoga razdoblja se plaćaju cjelokupne kamate u tom razdoblju i promjenjiv (varijabilan) dio glavnice (odobrenoga iznosa zajma)
- nominalni godišnji kamatnjak je stalan tijekom cijeloga razdoblja otplate zajma, a odnosi se na osnovno razdoblje ukamaćivanja
- obračun kamata je složen i dekurzivan
- razdoblje između dospijeća dvaju uzastopnih rata jednako je osnovnom razdoblju ukamaćivanja
- *Prednost* (?) *za dužnika*: nije potrebno računati iznos rate u svakom razdoblju

2. MODEL OTPLATE ZAJMA PROMJENJIVIM RATAMA S NOMINALNO JEDNAKIM OTPLATNIM KVOTAMA (MODEL B)

- zajam se otplaćuje promjenjivim ratama krajem svakoga obračunskoga razdoblja (najčešće: mjesečno)
- krajem svakoga razdoblja se plaćaju cjelokupne kamate u tom razdoblju i jednak dio glavnice (odobrenoga iznosa zajma)
- nominalni godišnji kamatnjak je stalan tijekom cijeloga razdoblja otplate zajma, a odnosi se na osnovno razdoblje ukamaćivanja
- obračun kamata je složen i dekurzivan
- razdoblje između dospijeća dvaju uzastopnih rata jednako je osnovnom razdoblju ukamaćivanja
- *Nedostatak* (?) *za dužnika*: nužno je računati iznos rate u svakom pojedinom razdoblju

3. PRETPOSTAVKE ZA USPOREĐIVANJE KVANTITATIVNIH EFEKATA NAVEDENIH MODELA

- jednaki odobreni iznosi zajma
- jednako ukupno vrijeme otplate zajma
- jednaka osnovna razdoblja ukamaćivanja
- jednaki nominalni kamatnjaci koji se odnose na osnovna razdoblja ukamaćivanja
- obračun kamata je složen i dekurzivan
- plaćanje svake rate krajem razdoblja
- razdoblje između dospijeća dviju uzastopnih rata jednako je osnovnom razdoblju ukamaćivanja

4. OSNOVNE FORMULE

Oznake:

$C_0 -$ početna vrijednost glavnice;

$p -$ kamatnjak;

$n -$ ukupno vrijeme kapitalizacije

$C_n -$ konačna vrijednost glavnice na kraju vremena kapitalizacije

Osnovne formule:

Jednostavni kamatni račun: $C_n = \left(1 + \frac{p \cdot n}{100}\right) \cdot C_0$;

Složeni kamatni račun: $C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

5. PROBLEM

- Uz navedene pretpostavke, koji od navedenih dvaju modela je bolji *sa stanovišta dužnika*?
- Ekvivalentno: koji od navedenih dvaju modela generira *manji nominalan iznos ukupnih kamata*?

6. OZNAKE KORIŠTENE U RJEŠENJU PROBLEMA

- C – odobreni iznos zajma
- p – kamatnjak
- $r := 1 + p\%$ - kamatni faktor
- n – ukupan broj rata

7. UKUPAN NOMINALNI IZNOS SVIH PLAĆENIH RATA U MODELU A

- Iznos jedne rate jednak je:

$$a_1 = \frac{r^n \cdot (r-1)}{r^n - 1} \cdot C$$

- Ukupan nominalan iznos svih plaćenih rata jednak je:

$$A := n \cdot a_1 = \frac{n \cdot r^n \cdot (r-1)}{r^n - 1} \cdot C$$

8. DOKAZ

Sadašnja (početna) vrijednost rate plaćene na kraju $n-$toga razdoblja:

$$(a_n)_{\text{sadašnja}} = \frac{a_n}{r^n}$$

Zbroj sadašnjih vrijednosti svih rata treba biti jednak iznosu zajma:

$$C = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \ldots + \frac{a}{r^n} \Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^n}} \cdot C = \frac{1}{\frac{1}{r} \cdot \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}{\frac{1}{r} - 1}} \cdot C = \frac{r^n \cdot (r-1)}{r^n - 1} \cdot C$$

9. UKUPAN NOMINALNI IZNOS SVIH PLAĆENIH RATA U MODELU B

- Iznos ukupnih kamata jednak je:

$$K_2 := \frac{C \cdot p \cdot (n+1)}{200}$$

- Ukupan nominalan iznos svih plaćenih rata jednak je:

$$B := C + K_2 = \left[\frac{(n+1)\cdot(r-1)}{2} + 1\right] \cdot C$$

10. DOKAZ

Na kraju $k-$toga razdoblja ostatak glavnice iznosi:

$$C_k = C - \frac{k-1}{n} \cdot C = \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot C, \text{ za } k = 1, \ldots, n.$$

Stoga je iznos kamata u $k-$tom razdoblju jednak:

$$I_k = \frac{C_k \cdot p \cdot 1}{100} = \frac{C \cdot p}{100} \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \text{ za } k = 1, \ldots, n,$$

pa je iznos ukupnih kamata jednak:

$$K_2 = \sum_{k=1}^{n} I_k = \frac{C \cdot p}{100} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{C \cdot p}{100} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1)\right) =$$

$$= \frac{C \cdot p}{100} \cdot \left(n - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \frac{C \cdot p}{100} \cdot \left(n - \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2}\right) = \frac{C \cdot p \cdot (n+1)}{200}.$$

Ukupan plaćeni iznos jednak je:

$$B = C + K_2 = \left[1 + \frac{p \cdot (n+1)}{200}\right] \cdot C = \left[1 + \frac{100 \cdot (r-1) \cdot (n+1)}{200}\right] \cdot C =$$

$$= \left[\frac{(n+1) \cdot (r-1)}{2} + 1\right] \cdot C$$

11. RJEŠENJE PROBLEMA

- Model B nije lošiji od modela A.
- Za $n = 1$ modeli su jednako dobri (generiraju nominalno jednake iznose ukupnih kamata).
- Za $n > 1$ model B je bolji od modela A.

12. NAPOMENA

- Valjanost rješenja za $n = 1$ se lako provjeri.
- Ako je $n > 1$, tvrdnja se može dokazati koristeći diferencijalni račun.
- Zbog toga pretpostavljamo $p \in \langle 0, +\infty \rangle$
- iako zapravo vrijedi $p \in \mathbf{Q}$.

13. LEMA

- Za svaki $n \in \mathbf{N}$ i svaki $r > 1$ vrijedi nejednakost:

$$(n-1)\cdot r^{n+1} - (n+1)\cdot r^{n} + (n+1)\cdot r - n + 1 \geq 0.$$

14. DOKAZ LEME

Za $n=1$ (ne)jednakost očito vrijedi za svaki $r \in \mathbf{R}$.

Neka je $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, proizvoljan, ali fiksiran.

Neka je:

$$f(r) = (n-1) \cdot r^{n+1} - (n+1) \cdot r^{n} + (n+1) \cdot r - n + 1.$$

Tada su:

$$f'(r) = (n^2-1) \cdot r^{n} - (n^2+n) \cdot r^{n-1} + n + 1,$$

$$f''(r) = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (r-1) \cdot r^{n-2}.$$

Za svaki $r > 1$ vrijedi:

$$f''(r) > 0 \Rightarrow f'(r) > f'(1) = 0 \Rightarrow f(r) > f(1) = 0.$$

Dakle, za $r \geq 1$ vrijedi $f(r) \geq 0$, što je i trebalo dokazati.

15. DOKAZ RJEŠENJA PROBLEMA

$$A - B \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n \cdot r^n \cdot (r-1)}{r^n - 1} \cdot C - \left[\frac{(n+1)\cdot(r-1)}{2} + 1\right] \cdot C \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1)\cdot r^{n+1} - (n+1)\cdot r^n + (n+1)\cdot r - n + 1 \geq 0$$

$$\overset{\text{Lema}}{\Leftrightarrow} \text{O.K.}$$

16. NAPOMENA

- Rješenje problema ostaje nepromijenjeno i ako se pretpostavka o plaćanju rata krajem razdoblja zamijeni pretpostavkom o plaćanju rata početkom razdoblja. (Dokaz je analogan.)
- Stoga se može zaključiti da rješenje problema *ne ovisi* o tome plaćaju li se rate početkom ili krajem razdoblja.

17. NUMERIČKI PRIMJER

- Kolinda i Zoran (svatko zasebno) otplaćuju zajam u iznosu od 120 000 CHF odobren na 25 godina uz godišnji kamatnjak 5.97.
- Zoran otplaćuje zajam nominalno jednakim mjesečnim ratama krajem svakoga mjeseca.
- Kolinda otplaćuje zajam promjenjivim mjesečnim ratama s nominalno jednakim otplatnim kvotama krajem svakoga mjeseca.
- Izračunajte nominalne iznose ukupnih kamata u oba slučaja. (Primijenite *konformne* kamatnjake.)
- Za koliko je postotaka nominalni iznos ukupnih kamata koje će platiti Zoran veći u odnosu na analogni iznos koji će platiti Kolinda?

18. RJEŠENJE PRIMJERA

- Zoran će platiti kamate u iznosu od 107 842.52 CHF, a Kolinda kamate u iznosu od 87 479.89 CHF.
- Prvi iznos je veći od drugoga za približno 23.277%.

PITANJA? KOMENTARI?


HVALA NA
POZORNOSTI!