ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
21. siječnja 2016.

4. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:
Kako je za 5 tanjura juhe potrebno 30 dag mrkve, onda je za 1 tanjur juhe potrebno 30 : 5 = 6 dag mrkve. 2 BODA
S obzirom da kuharica želi pripremiti po 2 tanjura juhe za svaku od 60 osoba, ona treba skuhati juhe za $2 \cdot 60 = 120$ tanjura. 2 BODA
Za 120 tanjura juhe potrebno joj je $120 \cdot 6 = 720$ dag mrkve. 2 BODA
……………………………………………………………………….… UKUPNO 6 BODOVA
Drugi način:
S obzirom da kuharica želi pripremiti po 2 tanjura juhe za svaku od 60 osoba, ona treba skuhati juhe za $2 \cdot 60 = 120$ tanjura. 2 BODA
Kako je za 5 tanjura juhe potrebno 30 dag mrkve i 120 : 5 = 24, 2 BODA
potrebno joj je $24 \cdot 30 = 720$ dag mrkve. 2 BODA
……………………………………………………………………….… UKUPNO 6 BODOVA

2. Traženi brojevi su 33, 34, 43, 39, 93, 44, 49, 94, 99. 5 BODOVA
Tih brojeva ima 9. 1 BOD
……………………………………………...…………………………… UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: Za napisan 1 ili 2 broja bodovati s 1 bodom, za 3 ili 4 s 2 boda, za 5 ili 6 s 3 boda, za 7 ili 8 s 4 boda, a za svih 9 s 5 bodova. Odgovor posebno bodovati.

3. Ovo je jedno moguće rješenje.

1	2	3
4	6	5
7	8	9

……………………………………………………………………...…… UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: Bilo koje točno rješenje bodovati sa 6 bodova. Ako se pojavljuje točno 5 različitih zbrojeva, bodovati s 4 boda. Ako se pojavljuju točno 4 različita zbroja, bodovati s 2 boda.

4. Prvi način:
Kada bi svih 50 bile kokoši, onda bi broj nogu bio $50 \cdot 2 = 100$. 2 BODA
S obzirom da je broj nogu za $140 - 100 = 40$ veći i da je 40 : 2 = 20, 2 BODA
u domaćinstvu ima 20 kunića. 1 BOD
Dakle, kokoši ima $50 - 20 = 30$. 1 BOD
……………………………………………………………………...…… UKUPNO 6 BODOVA
Drugi način:
Kada bi svih 50 bili kunići, onda bi broj nogu bio $50 \cdot 4 = 200$. 2 BODA
S obzirom da je broj nogu za $200 - 140 = 60$ manji i da je 60 : 2 = 30, 2 BODA
u domaćinstvu ima 30 kokoši. 1 BOD

Dakle, kunića ima $50 - 30 = 20$. 1 BOD
……………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:
Stranica trokuta srednje duljine je za 2 cm dulja od najkraće stranice trokuta i za 2 cm kraća od najdulje stranice trokuta. 1 BOD
Kada bi najkraću stranicu produljili za 2 cm i najdulju stranicu skratili za 2 cm, dobili bi jednakostraničan trokut istog opsega, 2 BODA
tj. duljina stranica jednakostraničnog trokuta bila bi $141 : 3 = 47$ cm. 1 BOD
Duljine stranica traženog trokuta su 45 cm, 47 cm, 49 cm. 2 BODA
……………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: Ako nema objašnjenja vezanog uz jednakostranični trokut, bodovati s najviše 4 boda.
Drugi način:
Neka je a duljina najkraće stranice.
Tada su duljine ostalih stranica $a + 2$ i $a + 4$. 1 BOD
Vrijedi $a + a + 2 + a + 4 = 141$ 1 BOD
pa je $3a + 6 = 141$ 1 BOD
odnosno $a = 45$ cm. 1 BOD
Ostale stranice trokuta su duljine $a + 2 = 47$ cm 1 BOD
i $a + 4 = 49$ cm. 1 BOD
……………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA
Treći način:
Neka je a duljina stranice trokuta koja nije niti najkraća, niti najdulja.
Tada su $a - 2$ i $a + 2$ duljine preostalih stranica tog trokuta. 1 BOD
Vrijedi $a - 2 + a + a + 2 = 141$ 1 BOD
odnosno $3a = 141$ 1 BOD
pa je $a = 47$ cm. 1 BOD
Najkraća stranica je $a - 2 = 45$ cm, 1 BOD
a najdulja je $a + 2 = 49$ cm. 1 BOD
……………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:
Vrijedi $\overline{abcde}6 \cdot 5 = \overline{13abcde}$. 1 BOD
Množenjem $\overline{abcde}6 \cdot 5$ postupno ćemo otkrivati znamenke *a, b ,c, d, e*. 1 BOD
$5 \cdot 6 = 30$ pa je $e = 0$. 1 BOD
$5 \cdot 0 + 3 = 3$ pa je $d = 3$. 1 BOD
$5 \cdot 3 + 0 = 15$ pa je $c = 5$. 1 BOD
$5 \cdot 5 + 1 = 26$ pa je $b = 6$. 1 BOD
$5 \cdot 6 + 2 = 32$ pa je $a = 2$. 1 BOD
$5 \cdot 2 + 3 = 13$. 1 BOD
$1326530 : 5 = 265306$ 2 BODA
………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA
Drugi način:
Vrijedi $\overline{abcde}6 \cdot 5 = \overline{13abcde}$. 1 BOD
Tada je $(10 \cdot \overline{abcde} + 6) \cdot 5 = 1300000 + \overline{abcde}$ 2 BODA
$50 \cdot \overline{abcde} + 30 = 1300000 + \overline{abcde}$ 1 BOD
$49 \cdot \overline{abcde} = 1299970$ 2 BODA
$\overline{abcde} = 26530$ 2 BODA
$1326530 : 5 = 265306$ 2 BODA
………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

7. Pravokutnici sa slike su *ABCD*, *ABFE*, *AGHE*, *AKLE*, *BFLK*, *BFHG*,*GKLH*,*EIJD*, *EMND*, EFCD, *IMNJ*, *IFCJ*, *MFCN*. 9 BODOVA
   Ima ih 13. 1 BOD
   ……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA
   Napomena: Ako nisu nabrojani svi pravokutnici, onda bodovati na sljedeći način:

BROJ NABROJANIH PRAVOKUTNIKA	BROJ BODOVA
12, 11	8
10, 9	7
8	6
7	5
6	4
5	3
4, 3	2
1, 2	1

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
21. siječnja 2016.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $2025 + 720 : (72 - 9 \cdot 7) - (4 \cdot 6 - 6) \cdot 5 + 1 =$

$= 2025 + 720 : (72 - 63) - (24 - 6) \cdot 5 + 1$ 2 BODA

$= 2025 + 720 : 9 - 18 \cdot 5 + 1$ 1 BOD

$= 2025 + 80 - 90 + 1$ 1 BOD

$= 2105 - 90 + 1$ 1 BOD

$= 2016$ 1 BOD

………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako je učenik točno odredio samo vrijednost izraza $72 - 9 \cdot 7$, dodjeljuje mu se 2 boda. Ako je učenik točno odredio samo vrijednost izraza $4 \cdot 6 - 6$, dodjeljuje mu se 1 bod.

2. Budući da jedan dan ima 24 sata i da je $2000 = 24 \cdot 83 + 8$, 1 BOD
zaključujemo da je Ivanu bio rođendan prije 83 dana i 8 sati. 1 BOD
Prosinac ima 31 dan, a studeni 30 dana, što je ukupno 61 dan. 1 BOD
Od 31. listopada u 24 sata treba „oduzeti" 22 dana i 8 sati. 1 BOD
Dakle, Ivan je rođen 9. listopada u 16 sati. 1 BOD
Budući da je Ivan 2015. godine napunio 12 godina, zaključujemo da je Ivan rođen 9. listopada 2003. godine u 16 sati. 1 BOD

………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako je učenik (uz korektna objašnjenja) odredio točan datum (i godinu), ali ne i sat Ivanova rođenja, rješenje se boduje s 5 bodova.

3. Prvi način:
S obzirom da su 5, 7 i 13 prosti brojevi, onda su u parovima relativno prosti odnosno traženi broj mora biti djeljiv s $5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$. 3 BODA
Budući da je $2\,016\,000 = 4\,430 \cdot 455 + 350$, 1 BOD
onda su traženi brojevi $4\,431 \cdot 455 = 2\,016\,105$ 1 BOD
i $4\,432 \cdot 455 = 2\,016\,560$. 1 BOD

………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: S 1 bodom boduje se zaključak da traženi broj mora biti djeljiv najmanjim zajedničkim višekratnikom brojeva 5, 7 i 13 čak i ako taj višekratnik nije određen ili nije točno određen. Neobrazloženi zaključak da traženi broj mora biti djeljiv brojem $5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$ (ako nije navedeno obrazloženje da je V(5, 7) = 35 i V(35, 13) = 455, odnosno da je V(5, 7, 13) = 455 na temelju činjenice da su brojevi 5, 7 i 13 relativno prosti) donosi samo 1 bod.

Drugi način:
S obzirom da su 5, 7 i 13 prosti brojevi, onda su u parovima relativno prosti odnosno traženi broj mora biti djeljiv brojem $5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$. 3 BODA
Budući da je $2\,016\,999 = 4\,432 \cdot 455 + 439$, 1 BOD
onda su traženi brojevi $2\,016\,999 - 439 = 2\,016\,560$ 1 BOD
i $2\,016\,560 - 455 = 2\,016\,105$. 1 BOD

………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: S 1 bodom boduje se zaključak da traženi broj mora biti djeljiv najmanjim zajedničkim višekratnikom brojeva 5, 7 i 13 čak i ako taj višekratnik nije određen ili nije točno određen. Neobrazloženi zaključak da traženi broj mora biti djeljiv brojem $5\cdot 7\cdot 13=455$ (ako nije navedeno obrazloženje da je V(5, 7) = 35 i V(35, 13) = 455, odnosno da je V(5, 7, 13) = 455 na temelju činjenice da su brojevi 5, 7 i 13 relativno prosti) donosi samo 1 bod.

4. Broj 36 260 rastavimo na umnožak prostih faktora:

$36\,260=2\cdot 2\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 37$. 2 BODA

Otac je najstariji pa zaključujemo da bi on mogao imati 37 godina. 1 BOD

U tom slučaju majka bi imala 37 – 2 = 35 godina, a 35 = 5 · 7. 1 BOD

Grupiranjem preostalih prostih faktora dobivamo

$36\,260=37\cdot(5\cdot 7)\cdot(2\cdot 2)\cdot 7=37\cdot 35\cdot 4\cdot 7$ 1 BOD

i zaključujemo da bi sin mogao imati 7, a kći 7 – 3 = 4 godine (a 4 = 2 · 2).

Otac ima 37 godina, majka 35, sin 7, a kći 4 godine. 1 BOD

………………………………………………...…………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Od učenika se očekuje objašnjenje načina grupiranja, tj. obrazloženje zašto su faktori grupirani baš na taj način. Točan rezultat bez odgovarajućeg obrazloženja boduje se s 4 boda.

5. Prvi način:

Ukupna površina svih dasaka mora biti 10 000 cm^2. 1 BOD

Ako želi policu s 4 reda, površina svake daske je 2 500 cm^2.

Ako je duljina daske 125 cm, širina joj mora biti 2500 : 125 = 20 cm. 2 BODA

Ako želi policu s 5 redova, površina svake daske treba biti 2 000 cm^2.

Širina joj je tada 2000 : 125 = 16 cm. 2 BODA

Marko treba kupiti 4 daske širine 20 cm ili 5 dasaka širine 16 cm. 1 BOD

………………………………………………...…………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Ukupna površina svih dasaka mora biti 10 000 cm^2. 1 BOD

Ako je duljina daske 125 cm, širina svih polica mora biti ukupno 10 000 : 125 = 80 cm. 2 BODA

Ako želi policu s 4 reda, širina daske mora biti 80 : 4 = 20 cm. 1 BOD

Ako želi policu s 5 redova, širina daske mora biti 80 : 5 = 16 cm. 1 BOD

Marko treba kupiti 4 daske širine 20 cm ili 5 dasaka širine 16 cm. 1 BOD

………………………………………………...…………………………… UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:

Na pločicama na kojima je jedno polje prazno (0), na preostalim poljima mogu biti 0, 1, 2, 3, 4, 5 ili 6. Za njihovo označavanje potrebna je 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 točkica. 1 BOD

Na pločicama na kojima je na jednom polju 1, na preostalim poljima mogu biti 1, 2, 3, 4, 5 ili 6.

Za njihovo označavanje potrebno je 6 · 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 27 točkica. 2 BODA

Na pločicama na kojima je na jednom polju 2, na preostalim poljima mogu biti 2, 3, 4, 5 ili 6.

Za njihovo označavanje potrebno je 5 · 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 30 točkica. 2 BODA

Na pločicama na kojima je na jednom polju 3, na preostalim poljima mogu biti 3, 4, 5 ili 6.

Za njihovo označavanje potrebno je 4 · 3 + 3 + 4 + 5 + 6 = 30 točkica. 1 BOD

Na pločicama na kojima je na jednom polju 4, na preostalim poljima mogu biti 4, 5 ili 6.

Za njihovo označavanje potrebno je 3 · 4 + 4 + 5 + 6 = 27 točkica. 1 BOD

Na pločicama na kojima je na jednom polju 5, na preostalim poljima mogu biti 5 ili 6.

Za njihovo označavanje potrebno je 2 · 5 + 5 + 6 = 21 točkica. 1 BOD

Na pločici na kojoj je na jednom polju 6, na preostalom polju može biti 6.

Za označavanje je potrebno 12 točkica. 1 BOD

U kompletu domino pločica ima ukupno 21 + 27 + 30 + 30 + 27 + 21 + 12 = 168 točkica. 1 BOD

………………………………………………...……………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:
Komplet domino pločica može se prikazati na sljedeći način.

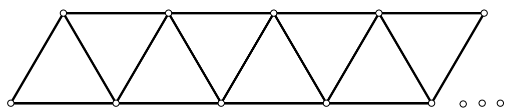
0, 0				
0, 1	1, 1			
0, 2	1, 2	2, 2		
0, 3	1, 3	2, 3	3, 3	
...	...	.....	....	
0, 6	1, 6	2, 6	....	6, 6

Pločica na kojima se nalazi barem jedno prazno polje ima 7, pločica na kojima se nalazi jedna točkica (1) na jednom polju, a na drugom jedna ili više točkica ima 6, pločica na kojima se nalaze dvije točkice (2) na jednom polju, a na drugom dvije ili više točkica ima 5, pločica na kojima se nalaze tri točkice (3) na jednom polju, a na drugom tri ili više točkica ima 4,..., pločica na kojima se na oba polja nalazi šest točkica (6) ima 1. 3 BODA
Ukupno ima 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 domino pločica, odnosno 56 polja na kojima se nalazi ravnomjerno raspoređenih 7 brojeva. Svaki broj pojavljuje se 56 : 7 = 8 puta. 3 BODA

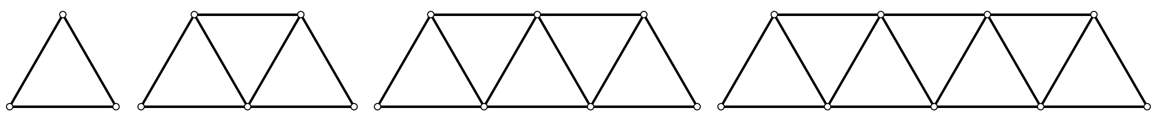
$8\cdot 0+8\cdot 1+8\cdot 2+8\cdot 3+8\cdot 4+8\cdot 5+8\cdot 6=$
$=8\cdot(1+2+3+4+5+6)=$
$=8\cdot 21=168$ 3 BODA

U kompletu domino pločica ukupan broj točkica je 168. 1 BOD
……………………………………………...……………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:
Promotrimo li sliku:

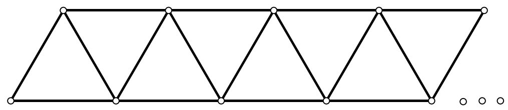


može se primijetiti da za prvi trokut Dijana mora uzeti 3 šibice,
a za svaki sljedeći trokut u nizu treba dodati samo 2 nove šibice. 2 BODA
Pomoću 99 šibica Dijana je napravila početni trokut i još (99 – 3) : 2 = 48 dodatnih trokuta, dakle njih 49. 2 BODA
Promotrimo li nizove koji su sastavljeni od neparnog broja trokuta,



uočavamo da je broj trokuta koji su „okrenuti prema gore" za 1 veći od broja trokuta koji su „okrenuti prema dolje".
Dakle, od n trokuta njih $(n+1):2$ je „okrenuto prema gore". 2 BODA
Udaljenost dviju najudaljenijih točaka tada je $((n+1):2)\cdot a$, pri čemu je a duljina stranice trokuta. 2 BODA
U nizu od 49 trokuta, „prema gore okrenutih" ima 25, a tražena udaljenost je 25 · 5 = 125 cm. 2 BODA
……………………………………………...……………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

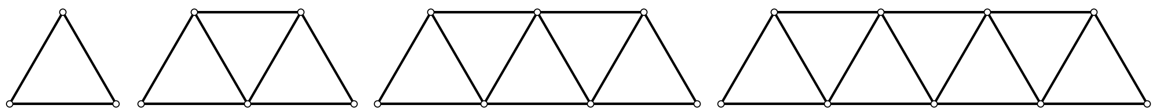
Drugi način:
Na temelju slike



zaključujemo:

Broj trokuta	1	2	3	4	5	…	x
Broj šibica	3	5	7	9	11	…	$2x + 1$

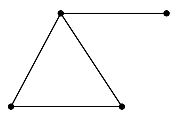
tj. da je za izradu niza koji sadrži x trokuta potrebno $2x + 1$ šibica. 2 BODA
Ako je Dijana upotrijebila 99 šibica, složila je $(99 - 1) : 2 = 49$ trokuta u nizu. 2 BODA
Promotrimo nizove koji su sastavljeni od neparnog broja trokuta.



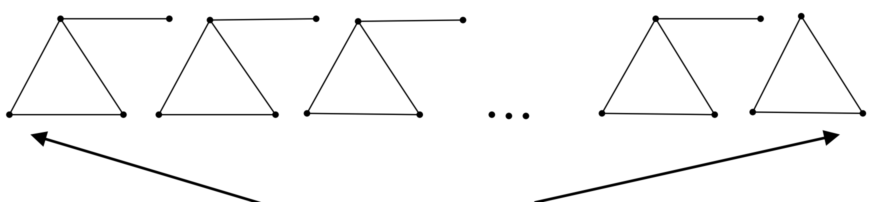
Označimo li duljinu stranice trokuta s a, možemo pisati:

Broj trokuta	1	3	5	7	…	n
Razmak najudaljenijih točaka	$1 \cdot a$	$2 \cdot a$	$3 \cdot a$	$4 \cdot a$	…	$((n + 1) : 2) \cdot a$

Dakle, ako u nizu ima neparan broj trokuta, razmak najudaljenijih točaka je
((broj trokuta + 1) : 2) · duljina stranice trokuta. 3 BODA
Za niz od 49 trokuta traženi je razmak jednak ((49 + 1) : 2) · duljina stranice trokuta.
Ako je svaka šibica duga $a = 5$ cm, tada udaljenost dviju najudaljenijih točaka iznosi
$(50 : 2) \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$ cm. 3 BODA
……………………………………………………..……………………..…… UKUPNO 10 BODOVA
Treći način:
Niz jednakostraničnih trokuta može se podijeliti na dijelove koji se sastoje od 4 šibice.



2 BODA
Budući da je $99 = 24 \cdot 4 + 3$, od 99 šibica mogu se složiti 24 takva dijela i još ostaju 3 šibice od kojih je moguće složiti posljednji jednakostranični trokut. 2 BODA



najudaljenije točke 4 BODA

Na slici su radi zornosti dijelovi odvojeni.

Udaljenost dviju najudaljenijih točaka je zbroj duljina 25 šibica, tj. $25 \cdot 5 = 125$ cm. 2 BODA

……………………………………………...……………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

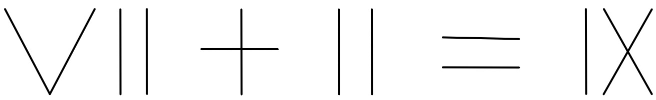
ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
21. siječnja 2016.

6. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

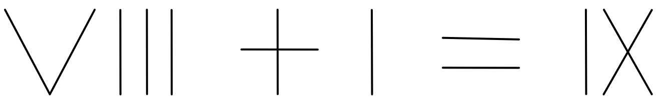
1. Na prvom je stajalištu izišlo 30 putnika, a ušlo 6 te ih je, nakon toga, bilo 48 u tramvaju. 2 BODA
Na drugom je stajalištu izišlo 20 putnika, a ušlo 8 pa ih je, nakon toga, bilo 36 u tramvaju. 2 BODA
Na trećem stajalištu izišlo je 15 putnika, a ušlo 10 te je vožnju nastavio 31 putnik. 2 BODA
…………………………………………………………………….… UKUPNO 6 BODOVA

2. Postoje 3 mogućnosti:
a)



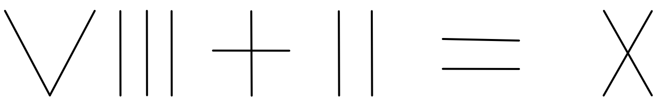
2 BODA

b)



2 BODA

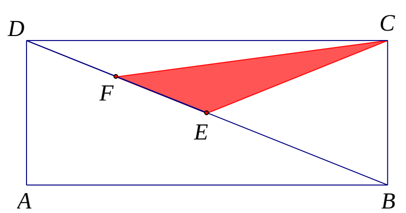
c)



2 BODA
……………………………………………………..…………………………… UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: Za svako napisano netočno premještanje umanjiti broj bodova za 1, ali najviše do 0 bodova.

3. Veliki kvadrat podijeljen na 4 manja jednaka kvadrata ima te kvadrate u 2 reda i 2 stupca te je broj točaka $(2+1)\cdot(2+1)=9$. 2 BODA
Veliki kvadrat podijeljen na 9 manjih jednakih kvadrata ima te kvadrate u 3 reda i 3 stupca te je broj točaka $(3+1)\cdot(3+1)=16$. 2 BODA
Tada veliki kvadrat podijeljen na 3600 manjih kvadrata ima te kvadrate u 60 redova i 60 stupaca pa je broj točaka $(60+1)\cdot(60+1)=3721$. 2 BODA
……………………………………………………..…………………………… UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja vrijedi 2 boda.

4. Prvi način:



1 BOD

Neka je P površina trokuta ΔECF.

Točka F je polovište dužine $\overline{ED}$ pa vrijedi $|DF|=|FE|$ što znači da je površina trokuta ΔDFC jednaka površini trokuta ΔECF jer imaju osnovicu jednake duljine i zajedničku visinu iz vrha C.
Dakle, površina trokuta ΔDEC jednaka je $2P$. 1 BOD

Točka E je polovište dužine $\overline{BD}$ pa vrijedi $|DE|=|EB|$ što znači da je površina trokuta ΔEBC jednaka površini trokuta ΔDEC jer imaju osnovicu jednake duljine i zajedničku visinu iz vrha C.
Dakle, površina trokuta ΔEBC jednaka je $2P$ pa je površina trokuta ΔCDB jednaka $4P$. 1 BOD

Kako je $ABCD$ pravokutnik, vrijedi $|AB|=|CD|$, $|\measuredangle BAD|=|\measuredangle DCB|$ i $|AD|=|CB|$ pa prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi $\Delta ABD \cong \Delta CDB$. 1 BOD

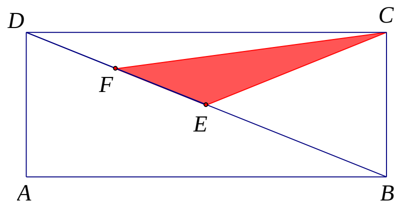
Prema tome je površina trokuta ΔABD jednaka $4P$, a površina četverokuta $ABCD$ jednaka je $8P$.
1 BOD

Količnik površine trokuta ΔECF i površine četverokuta $ABCD$ iznosi $\frac{P}{8P}=\frac{1}{8}=0.125$. 1 BOD

……………………………………………...…………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Rješenje bez objašnjenja sukladnosti trokuta bodovati s najviše 5 bodova. Ako nedostaju i druga potrebna objašnjenja, bodovati s najviše 3 boda.

Drugi način:



1 BOD

Točka F je polovište dužine $\overline{ED}$ pa vrijedi $|DF|=|FE|$ što znači da je površina trokuta ΔDFC jednaka površini trokuta ΔECF jer imaju osnovicu jednake duljine i zajedničku visinu iz vrha C.
Dakle, površina trokuta ΔECF jednaka je $\frac{1}{2}$ površine trokuta ΔDEC. 1 BOD

Točka E je polovište dužine $\overline{BD}$ pa vrijedi $|DE|=|EB|$ što znači da je površina trokuta ΔEBC jednaka površini trokuta ΔDEC jer imaju osnovicu jednake duljine i zajedničku visinu iz vrha C.
Dakle, površina trokuta ΔDEC jednaka je $\frac{1}{2}$ površine trokuta ΔCDB odnosno površina trokuta ΔECF jednaka je $\frac{1}{4}$ površine trokuta ΔCDB. 1 BOD

Kako je $ABCD$ pravokutnik, vrijedi $|AB|=|CD|$, $|\measuredangle BAD|=|\measuredangle DCB|$ i $|AD|=|CB|$ pa prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi $\Delta ABD \cong \Delta CDB$. 1 BOD

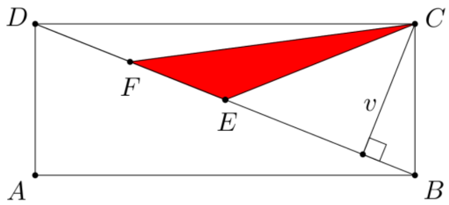
Prema tome je površina trokuta ΔCDB jednaka $\frac{1}{2}$ površine četverokuta $ABCD$ odnosno površina trokuta ΔECF jednaka je $\frac{1}{8}$ površine četverokuta $ABCD$. 1 BOD

Količnik površine trokuta ΔECF i površine četverokuta $ABCD$ iznosi $\frac{1}{8}=0.125$. 1 BOD

……………………………………………...…………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Rješenje bez objašnjenja sukladnosti trokuta bodovati s najviše 5 bodova. Ako nedostaju i druga potrebna objašnjenja, bodovati s najviše 3 boda.

Treći način:



1 BOD

Označimo s d duljinu dijagonale $\overline{BD}$ pravokutnika *ABCD*.

Neka je *v* visina pravokutnog trokuta ΔBCD iz vrha *C* na hipotenuzu $\overline{BD}$.

Vrijedi $|EF| = \frac{1}{2}|ED| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{4}d$. 1 BOD

v je također i visina trokuta Δ*ECF*.

Dakle, $P_{\Delta ECF} = \frac{|EF|\cdot v}{2} = \frac{\frac{1}{4}d\cdot v}{2} = \frac{dv}{8}$. 1 BOD

Kako je *ABCD* pravokutnik, vrijedi $|AB| = |CD|$, $|\measuredangle BAD| = |\measuredangle DCB|$ i $|AD| = |CB|$ pa prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi $\Delta ABD \cong \Delta CDB$. 1 BOD

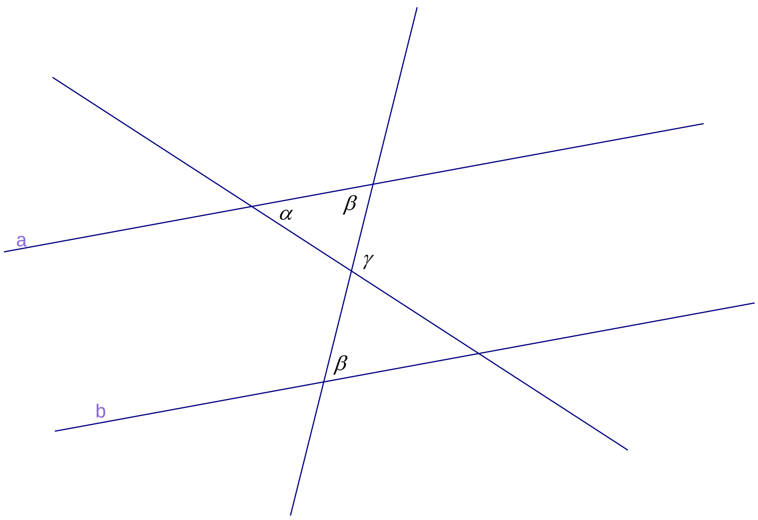
Tada je $P_{ABCD} = 2P_{\Delta CDB} = 2\cdot\frac{|BD|\cdot v}{2} = dv$. 1 BOD

Količnik površine trokuta ΔECF i površine četverokuta *ABCD* iznosi $\frac{\frac{dv}{8}}{dv} = \frac{1}{8} = 0.125$. 1 BOD

…………………..…………………………………...…………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Rješenje bez objašnjenja sukladnosti trokuta bodovati s najviše 5 bodova. Ako nedostaju i druga potrebna objašnjenja, bodovati s najviše 3 boda.

5.



U trokutu uz pravac *a* kut kojemu krakovi pripadaju pravcu *a* i presječnici je sukladan kutu β jer su to šiljasti kutovi s usporednim kracima. 2 BODA

Dalje se u tom trokutu izračuna veličina trećeg kuta δ:

$\delta = 180° - (43° + 65°) = 180° - 108° = 72°$. 2 BODA

Kut γ je sukut tog kuta δ pa vrijedi $\gamma = 180° - 72° = 108°$. 2 BODA

……………………………………………...……………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja vrijedi 3 boda.

6. Prvi način:

Ako proširimo razlomke tako da im brojnici budu 8, onda vrijedi $\frac{8}{46} < \frac{8}{8p} < \frac{8}{19}$. 2 BODA

Dalje slijedi $19 < 8p < 46$. 2 BODA

To znači da je $8p \in \{ 24, 32, 40 \}$ 2 BODA

odnosno $p \in \{ 3, 4, 5 \}$. 2 BODA

S obzirom da je p prost broj, onda je $p \in \{ 3, 5 \}$. 2 BODA

……………………………………………..………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Iz $\frac{4}{23} < \frac{1}{p}$ slijedi $p < \frac{23}{4}$. 2 BODA

Iz $\frac{1}{p} < \frac{8}{19}$ slijedi $\frac{19}{8} < p$. 2 BODA

Dakle, $\frac{19}{8} < p < \frac{23}{4}$ 2 BODA

odnosno $p \in \{ 3, 4, 5 \}$. 2 BODA

S obzirom da je p prost broj, onda je $p \in \{ 3, 5 \}$. 2 BODA

……………………………………………..……..…………………… UKUPNO 10 BODOVA

7. Neka su m i n traženi prirodni brojevi te $m < n$.

Tada je $m \cdot n = 68040$ i $V(m,n) = 3780$. 1 BOD

Kako vrijedi $m \cdot n = D(m,n) \cdot V(m,n)$, slijedi $D(m,n) = 68040 : 3780 = 18$. 2 BODA

Uzimajući u obzir da je $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ 1 BOD

i $3780 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, 2 BODA

postoje sljedeće mogućnosti:

m	n
$2 \cdot 3 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

2 BODA

Traženi brojevi su

m	n
18	3780
36	1890
54	1260
90	756
126	540
108	630
180	378
252	270

2 BODA

……………………………………..………..………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako nisu nabrojane sve mogućnosti, onda bodovati na sljedeći način:

BROJ NAPISANIH MOGUĆNOSTI	BROJ BODOVA
7,6	8
5,4	6
3,2	4
1	2

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
21. siječnja 2016.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$\frac{5}{8}:\left(0.4-2-\frac{1}{2}x\right)=1.25:\left(3.8-2\frac{1}{4}\cdot x+\frac{1}{2}\right)$

$\frac{5}{8}\cdot\left(3.8-2\frac{1}{4}\cdot x+\frac{1}{2}\right)=1.25\cdot\left(0.4-2-\frac{1}{2}x\right)$ 1 BOD

$\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{19}{5}-\frac{9}{4}\cdot x+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{2}{5}-2-\frac{1}{2}x\right)$ 1 BOD

$\frac{19}{8}-\frac{45}{32}x+\frac{5}{16}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}-\frac{5}{8}x\ /\cdot 32$ 1 BOD

$76-45x+10=16-80-20x$ 1 BOD

$-45x+20x=16-80-76-10$

$-25x=-150/:(-25)$ 1 BOD

$x=6$ 1 BOD

……………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$\frac{5}{8}:\left(0.4-2-\frac{1}{2}x\right)=1.25:\left(3.8-2\frac{1}{4}\cdot x+\frac{1}{2}\right)$

$0.625:(0.4-2-0.5x)=1.25:(3.8-2.25\cdot x+0.5)$

$0.625\cdot(3.8-2.25\cdot x+0.5)=1.25\cdot(0.4-2-0.5x)$ 1 BOD

$2.375-1.40625x+0.3125=0.5-2.5-0.625x$ 1 BOD

$2.6875-1.40625x=-2-0.625x$ 1 BOD

$-1.40625x+0.625x=-2-2.6875$ 1 BOD

$-0.78125x=-4.6875$ 1 BOD

$x=6$ 1 BOD

……………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Neka je k oznaka za karamelu, p oznaka za čokoladnu puslicu i g oznaka za gumeni bombon.
Zadatak je moguće riješiti ispisivanjem šesteročlanih skupova oblika $\{k,p,g,-,-,-\}$.
Na mjesta na kojima nedostaju članovi treba smjestiti sljedeće podskupove:

$\{k,k,k\}$, $\{p,p,p\}$, $\{g,g,g\}$ 1 BOD

$\{k,k,p\}$, $\{k,k,g\}$ 1 BOD

$\{p,p,k\}$, $\{p,p,g\}$ 1 BOD

$\{g,g,k\}$, $\{g,g,p\}$ 1 BOD

$\{k,p,g\}$ 1 BOD

Može se složiti 10 različitih vrećica s bombonima. 1 BOD

…....…………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko se nabrajaju šestorke (bez obzira na poredak članova) bodovati treba kao što je predloženo. Za tri šestorke 1 bod, za pet šestorki 2 boda, za sedam šestorki 3 boda, za devet šestorki 4 boda, za 10 šestorki 5 bodova. Točan odgovor nosi 1 bod. Za rješenja koja su ponovljena oduzimaju se bodovi, pri čemu se za svaka 2 ponovljena oduzima 1 bod i to do najviše 0 bodova.

Drugi način:

Neka je *k* oznaka za karamelu, *p* oznaka za čokoladnu puslicu i *g* oznaka za gumeni bombon.
Traženi broj različitih vrećica jednak je broju uređenih trojki (k, p, g) takvih da je $k + p + g = 6$.
1 BOD

Postoje tri skupa brojeva koji zadovoljavaju uvjete {2,2,2}, {1,2,3} i {1,1,4}. 1 BOD

Uređene trojke, koje se mogu složiti od članova navedenih skupova, su

(2, 2, 2) − 2 karamele, 2 puslice, 2 gumena bombona, 1 BOD

(4, 1, 1), (1, 4, 1), (1, 1, 4) 1 BOD

(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1) 1 BOD

Može se složiti 10 različitih vrećica s bombonima. 1 BOD

…....…………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Za rješenja koja su ponovljena oduzimaju se bodovi, pri čemu se za svaka 2 ponovljena oduzima 1 bod i to do najviše 0 bodova.

Treći način:

Rješenja ispisujemo u tablicu:

Broj karamela	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
Broj puslica	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1
Broj gumenih bombona	4	3	2	1	3	2	1	2	1	1

Svake dvije točne „kombinacije“ donose po 1 bod.

Može se složiti 10 različitih vrećica s bombonima. 1 BOD

…....…………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Za rješenja koja su ponovljena oduzimaju se bodovi, pri čemu se za svaka 2 ponovljena oduzima 1 bod i to do najviše 0 bodova.

3. Prvi način:

Budući da je aritmetička sredina brojeva *x*, *y*, *z*, *p* i *q* jednaka *a*, vrijedi $\frac{x+y+z+p+q}{5}=a$

odnosno $x+y+z+p+q=5a$. 1 BOD

Aritmetička sredina zadanih brojeva je

$$\frac{x+2y-3+y+2z-1+z+2p+p+2q+1+q+2x+3}{5}=$$ 1 BOD

$$=\frac{3x+3y+3z+3p+3q}{5}=$$ 1 BOD

$$=\frac{3(x+y+z+p+q)}{5}=$$ 1 BOD

$$=\frac{3\cdot 5a}{5}=3a.$$ 2 BODA

..………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Aritmetička sredina brojeva *x*, *y*, *z*, *p* i *q* jednaka je *a* pa vrijedi $\frac{x+y+z+p+q}{5}=a$. 1 BOD

Aritmetička sredina zadanih brojeva je

$$\frac{x+2y-3+y+2z-1+z+2p+p+2q+1+q+2x+3}{5}=$$ 1 BOD

$$=\frac{3x+3y+3z+3p+3q}{5}=$$ 1 BOD

$= \dfrac{3(x+y+z+p+q)}{5} =$ 1 BOD

$= 3 \cdot \dfrac{x+y+z+p+q}{5} = 3 \cdot a = 3a.$ 2 BODA

…………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

4. Prvi način:

Neka je p ukupan broj plavih kuglica u kutiji, c ukupan broj crvenih kuglica prije dodavanja, a C ukupan broj crvenih kuglica nakon dodavanja potrebnog broja crvenih kuglica.

Zbog odnosa broja plavih i crvenih kuglica u kutiji prije dodavanja crvenih kuglica vrijedi da je

$p : c = 3 : 7$ odnosno $p = \dfrac{3}{7}c$. 1 BOD

Zbog odnosa broja plavih i crvenih kuglica nakon dodavanja određenog broja crvenih kuglica vrijedi da je $p : C = 5 : 14$ odnosno $p = \dfrac{5}{14}C$. 1 BOD

Dalje slijedi da je $\dfrac{3}{7}c = \dfrac{5}{14}C \longrightarrow C = \dfrac{6}{5}c.$ 2 BODA

Budući da je $C = \dfrac{6}{5}c = \dfrac{120}{100}c = 120\,\%\, c$, novi broj crvenih kuglica iznosi 120 % početnog broja crvenih kuglica. 1 BOD

Broj crvenih kuglica potrebno je povećati za 20%. 1 BOD

…………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka je p ukupan broj plavih kuglica u kutiji, c ukupan broj crvenih kuglica prije dodavanja, a x broj dodanih crvenih kuglica.

Zbog odnosa broja plavih i crvenih kuglica na početku vrijedi da je $p : c = 3 : 7$ odnosno $p = \dfrac{3}{7}c$.

1 BOD

Zbog odnosa broja plavih i crvenih kuglica nakon dodavanja određenog broja crvenih kuglica vrijedi da je $p : (c + x) = 5 : 14$ odnosno $p = \dfrac{5}{14}(c+x)$. 1 BOD

Dalje slijedi da je $\dfrac{3}{7}c = \dfrac{5}{14}(c+x)$

$$\dfrac{3}{7}c = \dfrac{5}{14}c + \dfrac{5}{14}x \;/\cdot 14$$

$$6c = 5c + 5x$$

$$x = \dfrac{1}{5}c$$

2 BODA

Budući da je $x = \dfrac{1}{5}c = \dfrac{20}{100}c = 20\%c$, 1 BOD

broj crvenih kuglica potrebno je povećati za 20%. 1 BOD

…………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Neka je p ukupan broj plavih kuglica u kutiji, c ukupan broj crvenih kuglica prije dodavanja, a x broj dodanih crvenih kuglica.

Zbog odnosa broja plavih i crvenih kuglica na početku vrijedi da je $p : c = 3 : 7$ odnosno postoji racionalan broj m takav da je $p = 3m$ i $c = 7m$. 1 BOD

Zbog odnosa broja plavih i crvenih kuglica nakon dodavanja određenog broja crvenih kuglica vrijedi da je $p : (c + x) = 5 : 14$ odnosno postoji racionalan broj n takav da je $p = 5n$ i $c + x = 14n$.

1 BOD

Dalje slijedi da je $3m = 5n$ odnosno $m = \frac{5}{3}n$. 1 BOD

Vrijedi $c = 7 \cdot m = 7 \cdot \frac{5}{3}n = \frac{35}{3}n$ pa je $\frac{c+x}{c} = \frac{14n}{\frac{35}{3}n} = \frac{6}{5}$. 2 BODA

Dakle, $x = \frac{1}{5}c = \frac{20}{100}c = 20\%c$.

Broj crvenih kuglica potrebno je povećati za 20%. 1 BOD

………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

$S_{2015} = (1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + (2013 - 2014) + 2015 = (2014 : 2) \cdot (-1) + 2015 = -1007 + 2015 =$
$= 1008$ 3 BODA

$S_{2016} = (1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + (2015 - 2016) = (2016 : 2) \cdot (-1) = -1008$ 2 BODA

$S_{2015} + S_{2016} = 1008 + (-1008) = 0$ 1 BOD

……………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$S_{2015} + S_{2016} =$

$= (1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + (2013 - 2014) + 2015 + (1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + (2015 - 2016) =$

$= -1 \cdot 1007 + 2015 + (-1) \cdot 1008 =$ 3 BODA

$= -1007 + 2015 - 1008 =$ 1 BOD

$= -2015 + 2015 =$ 1 BOD

$= 0$ 1 BOD

……………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

$S_{2015} = (1 + 3 + 5 + \ldots + 2013 + 2015) - (2 + 4 + 6 + \ldots + 2012 + 2014) =$

$= \frac{(1+2015)\cdot 1008}{2} - \frac{(2+2014)\cdot 1007}{2} = 1008 \cdot 1008 - 1008 \cdot 1007 = 1008$ 3 BODA

$S_{2016} = (1 + 3 + 5 + \ldots + 2013 + 2015) - (2 + 4 + 6 + \ldots + 2014 + 2016) =$

$= \frac{(1+2015)\cdot 1008}{2} - \frac{(2+2016)\cdot 1007}{2} = 1008 \cdot 1008 - 1009 \cdot 1008 = -1008$ 2 BODA

$S_{2015} + S_{2016} = 1008 - 1008 = 0$ 1 BOD

……………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:

Ako se broj sličica koje ima Darko označi s x, onda Branko ima $\frac{3}{5}x$ sličica. 1 BOD

Kad bi Branko dao 150 sličica Darku, onda bi Darko imao $x + 150$ sličica, a Branku bi ostalo $\frac{3}{5}x - 150$ sličica. 2 BODA

Darko bi tada imao 3 puta više od Branka pa vrijedi jednadžba $3 \cdot \left(\frac{3}{5}x - 150\right) = x + 150$. 1 BOD

$\frac{9}{5}x - 450 = x + 150$

$\frac{4}{5}x = 600$ 2 BODA

$x = 750$

Darko ima 750 sličica, a Branko $\frac{3}{5} \cdot 750 = 450$. 1 BOD

Antun ima 80% više od Branka pa vrijedi 1.8 · 450 = 810. 2 BODA

Zajedno imaju 750 + 450 + 810 = 2010 sličica. 1 BOD

…..………………………………………………………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Kada bi Branko dao Darku 150 sličica, onda bi Darko imao tri puta više sličica od Branka.

Ako bi Branko tada imao x, onda bi Darko tada imao $3x$. 1 BOD

Ako Darko vrati Branku 150 sličica, onda Branko ima $x + 150$, a Darko $3x – 150$. Vrijedi

jednadžba $\frac{3}{5} \cdot (3x - 150) = x + 150$ 2 BODA

$\frac{9}{5}x - 90 = x + 150$

$\frac{4}{5}x = 240$ 2 BODA

$x = 300$

Branko ima $x + 150 = 300 + 150 = 450$. 1 BOD

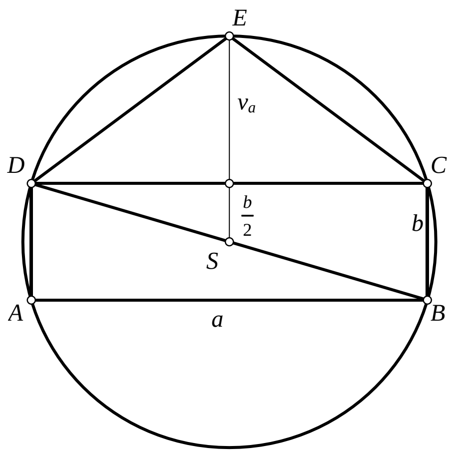
Darko ima $3x – 150 = 3 \cdot 300 – 150 = 750$. 1 BOD

Antun ima 80% više od Branka pa vrijedi 1.8 · 450 = 810. 2 BODA

Zajedno imaju 750 + 450 + 810 = 2010 sličica. 1 BOD

…..………………………………………………………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:



1 BOD

Neka je $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |AD| = b$ i neka je v_a duljina visine na osnovicu trokuta DCE.

Duljina polumjera kružnice opisane pravokutniku je $r = 20 : 2 = 10$ cm. 1 BOD

Trokut DCE je jednakokračan s osnovicom $\overline{DC}$ pa vrijedi $|SE| = r = v_a + \frac{b}{2}$. 1 BOD

Dalje je $\frac{b}{2} + v_a = 10$ odnosno $v_a = 10 - \frac{b}{2}$. 1 BOD

Iz jednakosti površina pravokutnika $ABCD$ i trokuta DCE slijedi

$ab = \frac{1}{2}av_a \Rightarrow b = \frac{1}{2}v_a \Rightarrow v_a = 2b$. 2 BODA

Vrijedi jednadžba $2b = 10 - \frac{b}{2} \,/\cdot 2$ 1 BOD

$4b = 20 - b$

$5b = 20$ 2 BODA

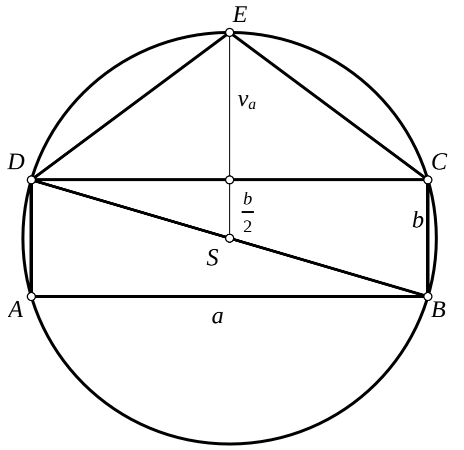
$b = 4$

Dakle, $|AD| = 4$ cm. 1 BOD

…..…………………………………………………………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Pogođeno (izmjereno) rješenje bez postupka vrijedi 2 boda.

Drugi način:



1 BOD

Neka je $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |AD| = b$ i neka je v_a duljina visine na osnovicu trokuta *DCE*.

Duljina polumjera kružnice opisane pravokutniku je $r = 20 : 2 = 10$ cm. 1 BOD

Trokut *DCE* je jednakokračan s osnovicom $\overline{DC}$ pa vrijedi $|SE| = r = v_a + \frac{b}{2}$. 1 BOD

Dalje je $\frac{b}{2} + v_a = 10$ odnosno $v_a = 10 - \frac{b}{2}$. 1 BOD

Iz jednakosti površina pravokutnika *ABCD* i trokuta *DCE* slijedi

$ab = \frac{1}{2} a v_a \Rightarrow ab = \frac{1}{2} a \cdot \left(10 - \frac{b}{2}\right)$ 2 BODA

$ab = 5a - \frac{ab}{4}$ 1 BOD

$\frac{5}{4} ab = 5a$ 1 BOD

$\frac{1}{4} b = 1 \quad \Rightarrow b = 4$ cm 2 BODA

…..…………………………………………………………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Pogođeno (izmjereno) rješenje bez postupka vrijedi 2 boda.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
21. siječnja 2016.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$(x+10^{2015})^2-(x-10^{2015})^2=10^{2016}$

$(x+10^{2015}+x-10^{2015})(x+10^{2015}-x+10^{2015})=10^{2016}$ 2 BODA

$(2x)(2\cdot 10^{2015})=10^{2016}$ 1 BOD

$4x\cdot 10^{2015}=10^{2016}$ 1 BOD

$4x=10$ 1 BOD

$x=\frac{5}{2}$ 1 BOD

……………………………………………………………..……….. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$(x+10^{2015})^2-(x-10^{2015})^2=10^{2016}$

Kvadriranjem zbroja i razlike dobivamo:

$x^2+2x\cdot 10^{2015}+10^{4030}-(x^2-2x\cdot 10^{2015}+10^{4030})=10^{2016}$ 2 BODA

$x^2+2x\cdot 10^{2015}+10^{4030}-x^2+2x\cdot 10^{2015}-10^{4030}=10^{2016}$ 1 BOD

$4x\cdot 10^{2015}=10^{2016}$ 1 BOD

$4x=10$ 1 BOD

$x=\frac{5}{2}$ 1 BOD

…………………………………………………….………………..…. UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

$\frac{a^5b^2}{c^3}:\frac{a^3b^5}{c^4}=\frac{a^5b^2}{c^3}\cdot\frac{c^4}{a^3b^5}=\frac{a^2c}{b^3}$. 1 BOD

Iz omjera $(ab):(ac):(bc)=5:3:1$ dobijemo

$(ac):(bc)=3:1$, $(ab):(ac)=5:3$ 1 BOD

odnosno

$\frac{ac}{bc}=\frac{3}{1}$, $\frac{a}{b}=\frac{3}{1}$; 1 BOD

$\frac{ab}{ac}=\frac{5}{3}$, $\frac{b}{c}=\frac{5}{3}$, $\frac{c}{b}=\frac{3}{5}$. 1 BOD

Uvrstimo vrijednosti $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{b}$ u početni izraz

$$\frac{a^2c}{b^3}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{c}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\frac{c}{b}=\left(\frac{3}{1}\right)^2\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{1}\cdot\frac{3}{5}=\frac{27}{5}.$$

Vrijednost zadanog izraza je $\frac{27}{5}$ ili $5\frac{2}{5}$ ili 5.4. 2 BODA

……………………………………………………………….………..,…. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$$\frac{a^5b^2}{c^3} : \frac{a^3b^5}{c^4} = \frac{a^5b^2}{c^3} \cdot \frac{c^4}{a^3b^5} = \frac{a^2c}{b^3}.$$ 1 BOD

Iz omjera $(ab):(ac):(bc) = 5:3:1$ dobijemo

$(ac):(bc) = 3:1$	$(ab):(ac) = 5:3$	1 BOD
$\frac{ac}{bc} = \frac{3}{1}$	$\frac{ab}{ac} = \frac{5}{3}$	
$\frac{a}{b} = \frac{3}{1}$	$\frac{b}{c} = \frac{5}{3}$	
$a:b = 3:1$	$b:c = 5:3$	1 BOD

Omjer $a:b = 3:1$ proširimo brojem 5 pa vrijedi $a:b = 15:5$.
Iz dva jednostavna omjera dobijemo prošireni omjer

$a:b = 15:5$ i $b:c = 5:3 \Rightarrow a:b:c = 15:5:3$. 1 BOD

Slijedi da je $a = 15k$, $b = 5k$, $c = 3k$. Uvrstimo *a, b* i *c* u zadani izraz

$$\frac{a^5b^2}{c^3} : \frac{a^3b^5}{c^4} = \frac{a^2c}{b^3} = \frac{(15k)^2 \cdot 3k}{(5k)^3} = \frac{15 \cdot 15 \cdot 3 \cdot k^3}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot k^3} = \frac{27}{5}.$$ 2 BODA

…………………………………………………………………..………..… UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

$$\frac{a^5b^2}{c^3} : \frac{a^3b^5}{c^4} = \frac{a^5b^2}{c^3} \cdot \frac{c^4}{a^3b^5} = \frac{a^2c}{b^3}.$$ 1 BOD

Iz omjera $(ab):(ac):(bc) = 5:3:1$ dobijemo

$(ac):(bc) = 3:1$	$(ab):(ac) = 5:3$	1 BOD
$\frac{ac}{bc} = \frac{3}{1}$	$\frac{ab}{ac} = \frac{5}{3}$	
$\frac{a}{b} = \frac{3}{1}$	$\frac{b}{c} = \frac{5}{3}$	
$a = 3b$	$c = \frac{3b}{5}$	2 BODA

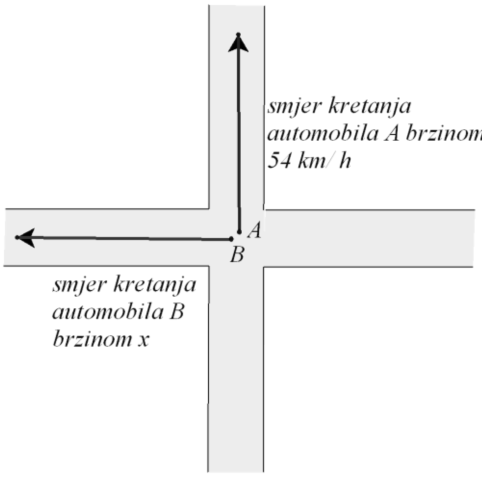
Uvrstimo a i c u zadani izraz

$$\frac{a^5b^2}{c^3} : \frac{a^3b^5}{c^4} = \frac{a^2c}{b^3} = \frac{(3b)^2 \cdot \frac{3b}{5}}{b^3} = \frac{9b^2 \cdot 3b}{5b^3} = \frac{27}{5}.$$ 2 BODA

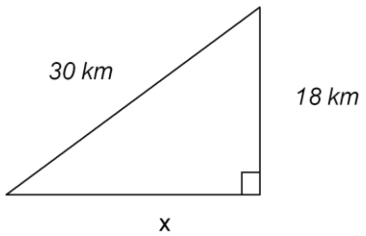
……………………..…………………………………...………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Zadatak se može riješiti i tako da se *b* i *c* izraze preko *a* ili tako da se *a* i *b* izraze preko *c*. U oba slučaja rješenje treba vrednovati u skladu s predloženim načinom vrednovanja.
Napomena 2: Zadatak se može riješiti uvrštavanjem u početni izraz, bez prethodnog pojednostavljivanja (1. korak!), i u tom slučaju točan rezultat treba vrednovati sa 6 bodova.

3. Označimo automobile s A i B.
Skica: 1 BOD



Iz uvjeta zadatka uočavamo da se kretanje automobila može skicirati pravokutnim trokutom.
1 BOD



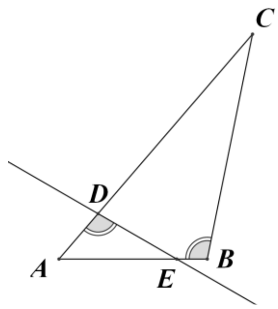
Ako se automobil A kreće brzinom od 54 km/ h, nakon 20 minuta prevalit će udaljenost od 18 kilometara. 1 BOD
Za to će vrijeme automobil B prevaliti put od 24 km jer je prema Pitagorinom poučku
$x = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{576} = 24$. 2 BODA
Ako u dvadeset minuta automobil prevali put od 24 km, za jedan sat prevalit će trostruko dulji put, tj. 72 km. Dakle, njegova brzina iznosi 72 km/ h. 1 BOD
…………………………………………………………….……..……… UKUPNO 6 BODOVA

4. Decimalni zapis razlomka $\frac{11}{21}$ je $0.\dot{5}2380\dot{9}$, a zbroj svih šest znamenaka u periodu je 27.
2 BODA

Kako je 2016 = 27 · 74 + 18, potrebno je zbrojiti 74 skupine po 6 navedenih znamenaka i još četiri (5+2+3+8) koje daju 18. 2 BODA
Ukupan broj decimala koje treba zbrojiti je 74 · 6 + 4 = 448. 2 BODA
……………………………………………………………………….….. UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

Skica: 1 BOD



Kutovi $\measuredangle ADE$ i $\measuredangle CBA$ su sukladni i kutovi $\measuredangle EAD$ i $\measuredangle BAC$ su sukladni (zajednički) pa prema poučku K-K o sličnosti slijedi da su trokuti *ADE* i *ABC* slični. 1 BOD

Ako su trokuti slični, duljine odgovarajućih stranica su im u istom omjeru

$|AE|:|AD|=|AC|:|AB|=2:1$ pa vrijedi 1 BOD

$|AE|=2|AD|$. 1 BOD

Iz uvjeta odnosa duljina stranica $|AD|$ i $|AE|$ slijedi

$|AE|=|AD|+6$

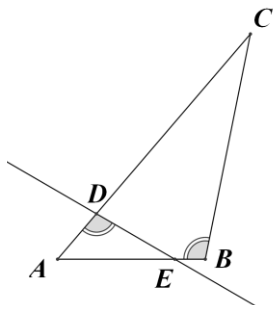
$2|AD|=|AD|+6$ 1 BOD

$|AD|=6\,\text{mm}$, $|AE|=12\,\text{mm}$ 1 BOD

…………………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Skica: 1 BOD



Kutovi $\measuredangle ADE$ i $\measuredangle CBA$ su sukladni i kutovi $\measuredangle EAD$ i $\measuredangle BAC$ su sukladni (zajednički) pa prema poučku K-K o sličnosti slijedi da su trokuti *ADE* i *ABC* slični. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka je $|AE|=|AD|+6$.

Označimo $|AD|$ s *x*.

Tada iz sličnosti trokuta *ADE* i *ABC* slijedi $|AC|:|AE|=|AB|:|AD|$ odnosno

60 : (*x*+6) = 30 : *x*. 1 BOD

Rješavanjem razmjera dobijemo

60*x* = 30*x* + 180 1 BOD

30*x* = 180

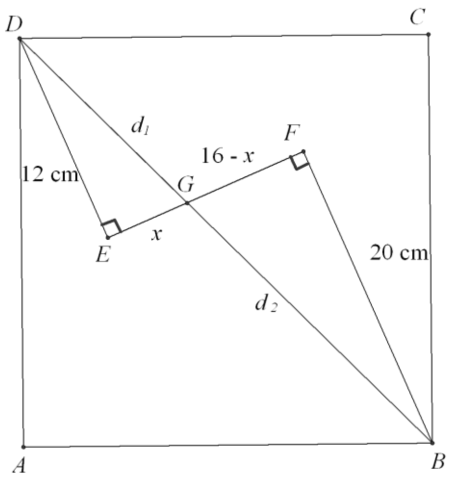
x = 6 mm. 1 BOD

Dakle, $|AD|=6\,\text{mm}$, $|AE|=12\,\text{mm}$. 1 BOD

…………………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:

Skica: 1 BOD



Dijagonala $\overline{BD}$ dijeli dužinu $\overline{EF}$ na dva dijela. Označimo ih s x i $16-x$.

Pravokutni trokuti *DEG* i *BFG* su slični jer se podudaraju u dva kuta (oba imaju pravi kut, a kutovi $\measuredangle EGD$ i $\measuredangle FGB$ su jednaki jer su vršni kutovi). 2 BODA

Zato vrijedi $12 : x = 20 : (16-x) \Rightarrow 32x = 192 \Rightarrow x = 6\text{cm}$. 2 BODA

Prema Pitagorinom poučku je

$d_1 = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}$ 1 BOD

i $d_2 = \sqrt{10^2 + 20^2} = 10\sqrt{5}$ 1 BOD

pa je dijagonala kvadrata $d = d_1 + d_2 = 16\sqrt{5}$, 1 BOD

a stranica kvadrata $a = \dfrac{d\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{10}$ cm. 1 BOD

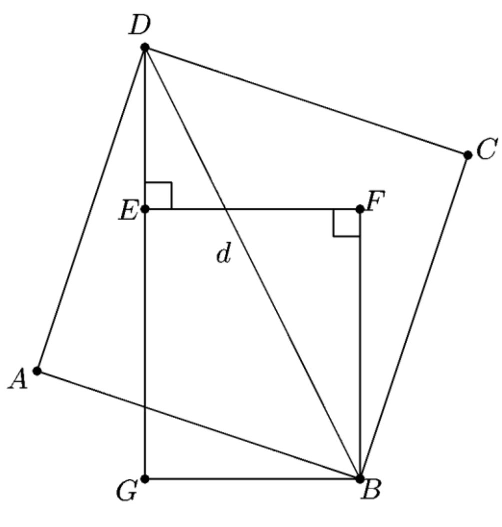
Površina kvadrata je $P = a^2 = 640 \text{ cm}^2$. 1 BOD

……………………………..…………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Produljimo dužinu $\overline{DE}$, a kroz točku *B* nacrtajmo paralelu s dužinom $\overline{EF}$ tako da se sijeku u točki *G*, kao na slici.

Skica: 1 BOD



Četverokut $EGBF$ je pravokutnik jer su mu kutovi u vrhovima E i F pravi i jer je $EF \parallel GB$.
(Trapez kojem su dva kuta uz istu osnovicu prava!) 1 BOD

Zato je $|EG| = |FB| = 20$ cm, a $|GB| = |EF| = 16$ cm. 2 BODA

Trokut DGB je pravokutan jer je kut u vrhu G pravi. 1 BOD

Kako je $|DG| = |DE| + |EG| = 12 + 20 = 32$ cm, 1 BOD

prema Pitagorinom poučku slijedi

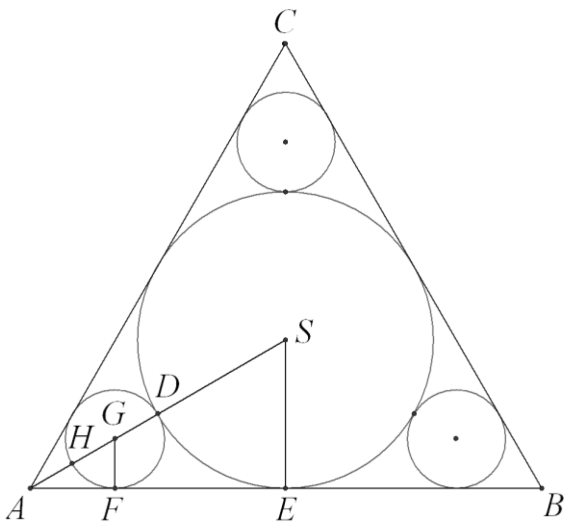
$d = \sqrt{|DG|^2 + |GB|^2} = \sqrt{32^2 + 16^2} = \sqrt{1024 + 256} = \sqrt{1280} = 16\sqrt{5}$ cm. 2 BODA

Kako je $d = a\sqrt{2}$, slijedi $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{10}$ cm 1 BOD

odnosno $P = a^2 = 640 \text{ cm}^2$. 1 BOD

…………………………………………..…………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:



Skica: 1 BOD

Neka je točka S središte upisanog kruga. Dakle, točka S je sjecište simetrala kutova.

$|\measuredangle BAC| = 60^o$, a pravac AS je simetrala kuta $\measuredangle BAC$ pa je $|\measuredangle EAS| = 30^o$. 1 BOD

Točka E je diralište, $\overline{SE} \perp \overline{AB} \Rightarrow |\measuredangle AES| = 90^o$.

Točka F je diralište, $\overline{GF} \perp \overline{AB} \Rightarrow |\measuredangle AFG| = 90^o$. 1 BOD

Trokuti ΔAFG i ΔAES su pravokutni s kutovima 30^o i 60^o $\Rightarrow$ duljina hipotenuze dvostruko je dulja od duljine kraće katete: $|AG| = 2|GF|$, $|AS| = 2|SE|$ 1 BOD

Označimo s R polumjer većeg kruga, a s r polumjer manjeg kruga.

$R = |SE| = |SD|$, a kako je $|AS| = 2|SE|$, slijedi da je $|AD| = R$. 1 BOD

$r = |GD| = |GF| = |GH|$, a kako je $|AG| = 2|GF|$, slijedi da je $|AH| = r$. 1 BOD

$R = |AD| = |AH| + |HG| + |GD| = r + r + r = 3r$ 1 BOD

Površina većeg kruga: $P_V = R^2\pi = (3r)^2\pi = 9r^2\pi$. 1 BOD

Površina manjeg kruga: $P_M = r^2\pi$. 1 BOD

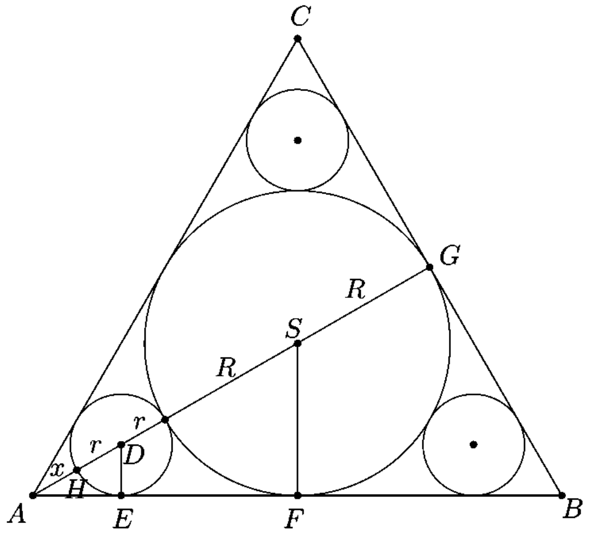
Izračunamo traženi odnos $\frac{P_V}{3P_M}=\frac{9r^2\pi}{3r^2\pi}=\frac{3}{1}=3:1.$

Odnos površine kruga k i zbroja površina tri upisana kruga iznosi $3:1$. 1 BOD

……………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica: 1 BOD



Neka je a duljina stranice jednakostraničnog trokuta ABC.

Visina $\overline{AG}$ pripada simetrali kuta $\measuredangle BAC$, R je duljina polumjera trokutu ABC upisane kružnice i iznosi trećinu duljine visine $\overline{AG}$ pa je $R=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Dužina $\overline{AS}$ je polumjer trokutu ABC opisane kružnice i njena duljina iznosi dvije trećine duljine visine $\overline{AG}$ pa je $|AS|=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. 1 BOD

Trokuti AED i AFS su pravokutni trokuti sa sukladnim šiljastim kutovima (30° i 60°) pa su prema poučku K-K o sličnosti slični. 1 BOD

Zato za njihove duljine stranica vrijedi $\frac{|AS|}{|AD|}=\frac{R}{r}$, tj. $\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{x+r}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{r}$ odakle se sređivanjem dobije $r=x$. 2 BODA

Visina $\overline{AG}$ ima duljinu $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ i vrijedi $x+2r+2R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, a nadalje $r=\frac{a\sqrt{3}}{18}$. 2 BODA

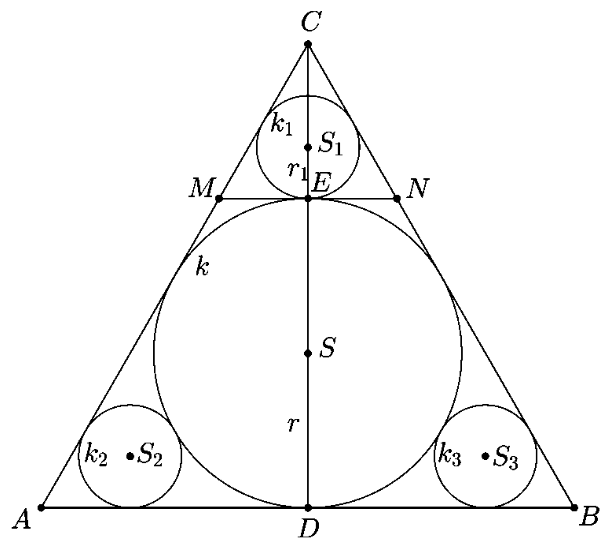
Površina triju upisanih krugova koji dodiruju veliki krug je $P_3=3\cdot r^2\pi=3\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{18}\right)^2\pi=\frac{a^2\pi}{36}$,

a površina velikog kruga je $P=R^2\pi=\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2\pi=\frac{a^2\pi}{12}$. 2 BODA

Omjer površina velikog kruga i zbroja površina triju malih krugova je 3 : 1. 1 BOD

……………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:
Skica: 1 BOD



Polumjer kružnice upisane jednakostraničnom trokutu *ABC* označimo s *r*.

Kako se središte upisane kružnice u jednakostraničnom trokutu podudara s njegovim težištem, a visina s težišnicom i kako težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1 od vrha prema polovištu nasuprotne stranice, slijedi da je polumjer upisane kružnice jednak $r = \frac{1}{3}v$, gdje je *v* duljina visine jednakostraničnog trokuta *ABC*. 2 BODA

Preostale tri kružnice (k_1, k_2, k_3) su sukladne, pa je dovoljno promatrati samo jednu (k_1).

Neka je *E* sjecište visine $\overline{CD}$ i kružnice *k* koje nije na stranici $\overline{AB}$.

Tada je $|CE| = |ES| = |SD| = r$. 1 BOD

Nacrtajmo paralelu s pravcem *AB* kroz točku *E*. Ona siječe stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ u točkama *M* i *N*.
Trokut *MNC* je također jednakostraničan, jer su mu svi kutovi jednaki 60°. 1 BOD

Duljina visine trokuta *MNC* jednaka je $v_1 = |CE| = r$. 1 BOD

Kružnica k_1 je upisana kružnica jednakostraničnom trokutu *MNC* pa za njen polumjer r_1 vrijedi

$r_1 = \frac{1}{3}v_1 = \frac{1}{3}r$. 2 BODA

Zato je omjer površine velikog kruga i zbroja površina tri mala kruga jednak

$$\frac{r^2\pi}{3r_1^2\pi} = \frac{r^2}{3\cdot\left(\frac{1}{3}r\right)^2} = \frac{r^2}{3\cdot\frac{r^2}{9}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3:1.$$ 2 BODA

………………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA