ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
23. veljače 2016.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Cijena jedne krizanteme je 9 kn, a ruže 10 kn. 1 BOD

Ako je x broj krizantema prodanih prošle godine,

onda je $2x$ broj tulipana, a $3x$ broj ruža prodanih prošle godine. 1 BOD

Za zaradu od prodanog cvijeća redom vrijedi

$x \cdot 9 + 2x \cdot 8 + 3x \cdot 10 = 275\,000$ 1 BOD

$9x + 16x + 30x = 275\,000$ 1 BOD

$55x = 275\,000$ 1 BOD

$x = 275\,000 : 55 = 5000$ 1 BOD

Prošle je godine prodano 5 000 krizantema, 10 000 tulipana i 15 000 ruža. 3 BODA

Dakle, ukupno je prodano 30 000 cvjetova. 1 BOD

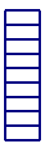
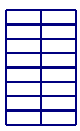
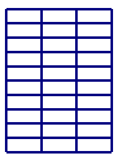
……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Cijena jedne krizanteme je 9 kn, a ruže 10 kn. 1 BOD

Ako je x broj krizantema prodanih prošle godine, tada je $2x$ broj tulipana,

a $3x$ broj ruža prodanih prošle godine. 1 BOD

Neka je zarada od krizantema označena sa  x, od tulipana  $2x$, a od ruža  $3x$.

Ukupna zarada od svega cvijeća (u iznosu od 275 000 kn) sastoji se od

9 + 16 + 30 = 55 jednakih dijelova.

Vrijednost svakoga od tih dijelova je 275 000 : 55 = 5000 kn. 2 BODA

Od krizantema je zarađeno 5000 · 9 = 45 000 kn, a budući da je cijena jedne krizanteme bila 9 kn, prodano je ukupno 45 000 : 9 = 5 000 krizantema. 1 BOD

Od tulipana je zarađeno 5000 · 16 = 80 000 kn, a budući da je cijena jednog tulipana bila 8 kn,

prodano je ukupno 80 000 : 8 = 10 000 tulipana. 2 BODA

Od ruža je zarađeno 5000 · 30 = 150 000 kn, a budući da je cijena jedne ruže bila 10 kn,

prodano je ukupno 150 000 : 10 = 15 000 ruža. 2 BODA

Ukupno je prodano 5 000 + 10 000 + 15 000 = 30 000 cvjetova. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

2. Rastavom broja 3915 na proste faktore dobiva se:

3915 = 3 · 3 · 3 · 5 · 29. 2 BODA

Kako se pomoću faktora rastava ne može dobiti niti 30, niti 31, posljednji dan u mjesecu bio je 29.,

1 BOD

a jedino prijestupna veljača ima 29 dana pa je povratak u 3. mjesecu. 1 BOD

Preostali brojevi iz rastava (3, 3 i 5) daju 3 rješenja:

1.) 9 dana zimovanja i petoro djece
Povratak je 8. 3. 2 BODA

2.) 5 dana zimovanja i devetoro djece
Povratak je 4. 3. 2 BODA

3.) 15 dana zimovanja i troje djece
Povratak je 14. 3. 2 BODA

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

3. Umnožak brojeva $\overline{61x}$ i $\overline{37y1}$ djeljiv je brojem 15 ako vrijedi jedna od mogućnosti:

a) barem jedan broj je djeljiv i brojem 3 i brojem 5 ili

b) jedan broj je djeljiv brojem 3, a drugi brojem 5. 2 BODA

Budući da broj $\overline{37y1}$ ima zadnju znamenku 1 (znamenku jedinice), taj broj ne može biti djeljiv

brojem 5 (znamenka jedinica mora biti 0 ili 5).

To ima za posljedicu da broj $\overline{61x}$ mora biti djeljiv brojem 5, tj. mora biti ili $x = 0$ ili $x = 5$.

2 BODA

Ako je $x = 5$, onda je prvi broj jednak 615, a on je djeljiv i brojem 5 i brojem 3 (zbroj znamenaka je 12). Dakle, djeljiv je brojem 15 pa će i umnožak broja 615 s bilo kojim brojem biti djeljiv s 15.

Zato znamenka y u broju $\overline{37y1}$ može biti bilo koja od znamenaka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ili 9.

3 BODA

Drugi broj može biti: 3701, 3711, 3721, 3731, 3741, 3751, 3761, 3771, 3781, 3791. 1 BOD

Ako je $x = 0$, onda je prvi broj jednak 610, a on nije djeljiv brojem 3 jer mu je zbroj znamenaka 7. Zato broj $\overline{37y1}$ mora biti djeljiv brojem 3, tj. y može biti 1, 4 ili 7, odnosno drugi broj je u tom slučaju 3711, 3741 ili 3771. 2 BODA

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Povežemo li svaku razinu s brojem malih trokutića na njoj, uočavamo da vrijedi:

1. razina – 1 trokutić
2. razina – 3 trokutića
3. razina – 5 trokutića
4. razina – 7 trokutića … 1 BOD

Zaključujemo da će na 5. razini biti 9, na 6. razini 11 trokutića, itd… 1 BOD

tj. da će na n-toj razini biti $2n - 1$ trokutić. 1 BOD

Na posljednjoj, stotoj razini, bit će $2 \cdot 100 - 1 = 199$ trokutića. 2 BODA

Ukupan broj trokutića dobije se zbrajanjem $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 199$. 1 BOD

Primjenjujući Gaussovu dosjetku dobijemo

$$1+3+5+...+197+199=(1+199)\cdot(100:2)=200\cdot 50=10000.$$ 3 BODA

Trokut sastavljen od 100 razina sadrži 10 000 trokutića. 1 BOD

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Računanje zbroja 1 + 3 + 5 + 7 + … + 195 + 197 + 199 moguće je na više načina.

Taj zbroj se može izračunati i ovako

1 + 3 + 5 + 7 + … + 195 + 197 + 199 =

= (1 + 199) + (3 + 197) + (5 + 195) + … + (99 + 101) = 1 BOD

= 200 + 200 + 200 + … + 200 = (ima 50 pribrojnika) 1 BOD

= 50 · 200 = 10 000 1 BOD

ili ovako

1 + 3 + 5 + 7 + … + 195 + 197 + 199 =

= (1 + 2 + 3 + … + 199 + 200) – (2 + 4 + 6 + … + 198 + 200) = 1 BOD

= (200 · 201) : 2 – 2 · (1 + 2 + 3 + … + 99 + 100) =

= 100 · 201 – 2 · (100 · 101 : 2) = 1 BOD

= 20 100 – 10 100 = 10 000 1 BOD

i na druge načine.

Točno određivanje tog zbroja boduje se s 3 boda.

Drugi način:

U 1. razini je 1 trokutić.

U 1. i 2. razini je ukupno $1 + 3 = 4$ trokutića, pri čemu je $4 = 2 \cdot 2$. 1 BOD

U 1., 2. i 3. razini ukupno je $1 + 3 + 5 = 9$ trokutića, pri čemu je $9 = 3 \cdot 3$. 1 BOD

U 1., 2., 3. i 4. razini je ukupno $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ trokutića, pri čemu je $16 = 4 \cdot 4$. 1 BOD

U prvih pet razina nalazi se ukupno $5 \cdot 5 = 25$ trokutića,

u prvih šest razina broj trokutića je $6 \cdot 6 = 36$, 1 BOD

a to znači da trokut sastavljen od 100 razina sadrži $100 \cdot 100 = 10\ 000$ trokutića. 1 BOD

Broj trokutića na pojedinoj razini nalazimo promatranjem početne situacije:

1. razina – 1 trokutić
2. razina – 3 trokutića, $3 = 2 \cdot 2 - 1$
3. razina – 5 trokutića, $5 = 2 \cdot 3 - 1$
4. razina – 7 trokutića, $7 = 2 \cdot 4 - 1$ … 1 BOD

Na 5. razini bit će 9 ($9 = 2 \cdot 5 - 1$) , na 6. razini 11 ($11 = 2 \cdot 6 - 1$) trokutića, itd.…
tj. da će na n-toj razini biti $2n - 1$ trokutić. 2 BODA

Na posljednjoj, stotoj razini, bit će $2 \cdot 100 - 1 = 199$ trokutića. 2 BODA

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Zaključak da je ukupan broj trokutića u n razina jednak $n \cdot n$, odnosno da trokut sastavljen od 100 razina sadrži $100 \cdot 100 = 10\ 000$ trokutića, boduje se s 5 bodova, neovisno o tome razmatraju li se trokutići sadržani u pet i šest razina ili samo za (nacrtane) četiri razine.

5. Zbroj znamenaka svih jednoznamenkastih brojeva jednak je 45. 1 BOD

Zbroj znamenaka svih dvoznamenkastih brojeva dobit ćemo tako da zbrojimo sve znamenke na mjestu desetica ($10 \cdot 45$) i sve znamenke na mjestu jedinica ($9 \cdot 45$):

$10 \cdot 45 + 9 \cdot 45 = 19 \cdot 45 = 855$. 1 BOD

Zbroj znamenaka svih brojeva od 1 do 99 (manjih od 100) jednak je $45 + 855 = 900$. 1 BOD

Zbroj znamenaka brojeva od 100 do 999 (svih troznamenkastih brojeva) jednak je zbroju svih znamenaka na mjestu stotica ($100 \cdot 45$) uvećanom za zbroj svih znamenaka u svim dvoznamenkastim „završetcima" ($9 \cdot 900$):

$100 \cdot 45 + 9 \cdot 900 = 4500 + 8100 = 12\ 600$. 2 BODA

Zbroj znamenaka svih brojeva od 1000 do 1999 jednak je

$1000 \cdot 1 + 900 + 12\ 600 = 14\ 500$. 2 BODA

Zbroj znamenaka brojeva od 2000 do 2016 jednak je $17 \cdot 2 + 45 + 7 + 21 = 107$. 2 BODA

Ukupan zbroj svih znamenaka je 900 + 12 600 + 14 500 + 107 = 28 107. 1 BOD

…………………………………………………………...……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Bez obzira na način rješavanja, koraci u rješavanju moraju biti valjano argumentirani. Ukoliko učenik točno postavi zadatak, a pogriješi samo pri računanju u nekom od dijelova zadatka, za svaku takvu pogrešku oduzeti samo bodove koje donosi taj dio zadatka, ali ne i bod za konačno rješenje.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
23. veljače 2016.

6. razred-rješenja

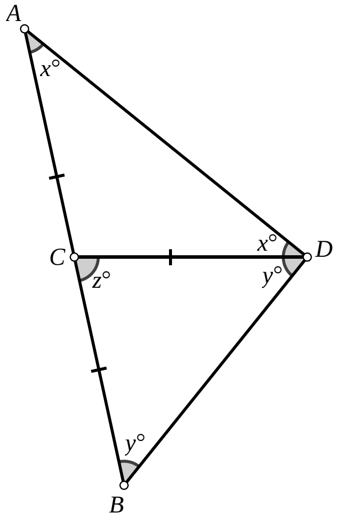
OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.

Posuda A	Posuda B	
U jednoj litri smjese $\frac{8}{15} l$ *crvene* $\frac{7}{15} l$ *bijele*	U jednoj litri smjese $\frac{11}{20} l$ *crvene* $\frac{9}{20} l$ *bijele*	2 boda
Iz sedam litara odliveno $7 \cdot \frac{7}{15} = \frac{49}{15} l$ *bijele*	Iz sedam litara odliveno $7 \cdot \frac{9}{20} = \frac{63}{20} l$ *bijele*	3 boda
U ostatku, tj. u 8 litara smjese ostalo $8 \cdot \frac{7}{15} = \frac{56}{15} l$ *bijele*	U ostatku, tj. u 13 litara smjese ostalo $13 \cdot \frac{9}{20} = \frac{117}{20} l$ *bijele*	3 boda
U posudi A bit će: $\frac{56}{15} + \frac{63}{20} = \frac{413}{60} = 6\frac{53}{60} l$ bijele boje.	U posudi B bit će: $\frac{117}{20} + \frac{49}{15} = \frac{547}{60} = 9\frac{7}{60} l$ bijele boje	2 boda

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:



1 BOD

Trokut ACD je jednakokračan pa vrijedi $|\measuredangle ADC| = |\measuredangle CAD| = x°$. 1 BOD

Kut $\measuredangle BCD$ je vanjski kut trokuta ACD koji je nasuprot unutarnjih kutova $\measuredangle CAD$ i $\measuredangle ADC$ pa vrijedi $z° = x° + x° = 2x°$. 2 BODA

Trokut BCD je jednakokračan pa vrijedi $|\measuredangle DBC| = |\measuredangle CDB| = y°$. 1 BOD

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je 180° pa za trokut BCD vrijedi

$|\measuredangle DBC| + |\measuredangle CDB| + |\measuredangle BCD| = 180°$. 2 BODA

$y° + y° + z° = 180°$

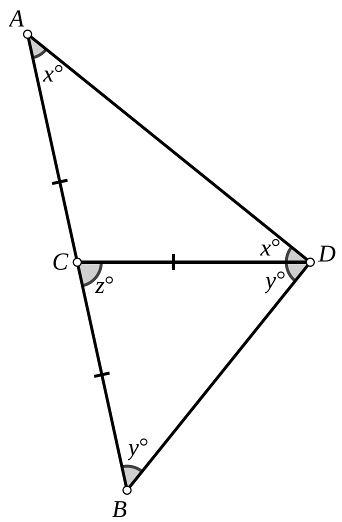
$2x° + 2y° = 180°$

$x° + y° = 90°$ 2 BODA

Dakle, $|\measuredangle ADB| = |\measuredangle ADC| + |\measuredangle CDB| = x° + y° = 90°$. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



1 BOD

Trokut ACD je jednakokračan pa vrijedi $|\measuredangle ADC| = |\measuredangle CAD| = x°$. 1 BOD

Kut $\measuredangle BCA$ je ispruženi kut pa iz uvjeta zadatka vrijedi da je $|\measuredangle DCA| = 180° - z°$.

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je 180° pa za trokut ACD vrijedi

$|\measuredangle DCA| + |\measuredangle ADC| + |\measuredangle CAD| = 180°$. 1 BOD

$180° - z° + x° + x° = 180°$

$2x° = z°$

$x° = \frac{z°}{2}$. 2 BODA

Analogno, trokut BCD je jednakokračan pa vrijedi $|\measuredangle CDB| = |\measuredangle DBC| = y°$. 1 BOD

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je 180° pa za trokut BCD vrijedi

$|\measuredangle BCD| + |\measuredangle CDB| + |\measuredangle DBC| = 180°$. 1 BOD

$z° + y° + y° = 180°$

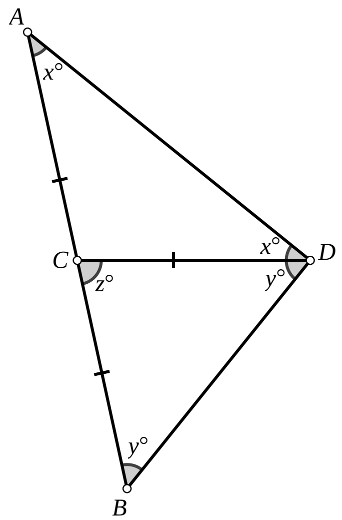
$2y° = 180° - z°$

$y° = \frac{180° - z°}{2}$. 2 BODA

Na kraju, $|\measuredangle ADB| = x° + y° = \frac{z°}{2} + \frac{180° - z°}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:



1 BOD

Trokut ACD je jednakokračan pa vrijedi $|\measuredangle ADC| = |\measuredangle CAD| = x°$. 1 BOD

Trokut BCD je jednakokračan pa vrijedi $|\measuredangle DBC| = |\measuredangle CDB| = y°$. 1 BOD

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je 180° pa za trokut ABD vrijedi

$|\measuredangle BAD| + |\measuredangle DBA| + |\measuredangle ADB| = x° + y° + (x° + y°) = 2x° + 2y° = 180°$ 4 BODA

odnosno $x° + y° = \frac{180°}{2} = 90°$. 2 BODA

Dakle, $|\measuredangle ADB| = x° + y° = 90°$. 1 BOD

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

S obzirom da zbroj tisuću najmanjih uzastopnih pozitivnih cijelih brojeva iznosi

$1 + 2 + 3 + \ldots + 1000 = \dfrac{1000 \cdot 1001}{2} = 500500$, 2 BODA

a naših traženih je 31500, najmanji traženi broj je negativan, a najveći pozitivan. 1 BOD

Zbroj $0 + 1 + 2 + \ldots + 999$ se razlikuje od zbroja $1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$ jer nema pribrojnik 1000, a ima pribrojnik 0. Dakle, manji je za 1000. 1 BOD

Zbroj $-1 + 0 + 1 + \ldots + 998$ se razlikuje od zbroja $0 + 1 + 2 + \ldots + 999$ jer nema pribrojnik 999, a ima pribrojnik -1. Dakle, manji je za 1000. 1 BOD

Analogno, svaki sljedeći manji je za 1000. 1 BOD

Kako je $500\,500 - 31\,500 = 469\,000$ i $469\,000 : 1000 = 469$, 2 BODA

najveći od traženih brojeva je $1000 - 469 = 531$, 1 BOD

a najmanji je $1 - 469 = -468$. 1 BOD

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Razmatranje zbrojeva te zaključivanje o smanjivanju za 1000 boduje se s ukupno 3 boda.

Drugi način:

Prvi broj označimo s x. Slijede ga $x + 1, x + 2, \ldots, x + 999$. 1 BOD

Vrijedi $x + (x + 1) + (x + 2) + \ldots + (x + 999) = 31\,500$ 1 BOD

odnosno $1000x + (1 + 2 + \ldots + 999) = 31\,500$. 2 BODA

Gaussovom dosjetkom izračunamo da je $1 + 2 + \ldots + 999 = 499\,500$. 2 BODA

Vrijedi $1000x + 499\,500 = 31\,500$

$1000x = -468\,000$

$x = -468$. 2 BODA

Tada je $x + 999 = 531$. 1 BOD

Najmanji od traženih brojeva je broj -468, a najveći je 531. 1 BOD

…………………………………………………………..…………….… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Neka je $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1000} = 31500$. 1 BOD

Prema Gaussovoj dosjetki je

$$a_1 + a_{1000} = a_1 + a_1 + 999 = 2a_1 + 999$$

$$a_2 + a_{999} = a_1 + 1 + a_1 + 998 = 2a_1 + 999$$

$$a_3 + a_{998} = a_1 + 2 + a_1 + 997 = 2a_1 + 999$$

…

$$a_{500} + a_{501} = a_1 + 499 + a_1 + 500 = 2a_1 + 999$$ 3 BODA

Zbrojivši sve ove jednakosti dobivamo

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1000} = 500 \cdot (2a_1 + 999) .$$ 1 BOD

Zato je $500 \cdot (2a_1 + 999) = 31500 \quad / : 500$

$$2a_1 + 999 = 63$$

$$2a_1 = 63 - 999 = -936 \quad / : 2$$

$$a_1 = -468$$ 4 BODA

Slijedi $a_{1000} = -468 + 999 = 531$. 1 BOD

…………………………………………………………..…………….… UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Veličina kuta između dva uzastopna broja na satu iznosi $360° : 12 = 30°$. 2 BODA

Mala kazaljka se za 40 min = $\frac{2}{3}$ h pomakne za $\frac{2}{3} \cdot 30° = 20°$. 2 BODA

Dakle, u 3 sata i 40 minuta mala kazaljka otklonila se $3 \cdot 30° + 20° = 110°$ od položaja 12 sati.

1 BOD

U jednome satu se velika kazaljka pomakne za puni krug odnosno 360°. 1 BOD

Dakle, u 3 sata i 40 minuta velika se kazaljka pomakla $240°$ od položaja 12 sati. 2 BODA

Manji kut između kazaljki iznosi $240° - 110° = 130°$. 2 BODA

………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Veličina kuta između dva uzastopna broja na satu iznosi $360° : 12 = 30°$. 2 BODA

Mala kazaljka se za 40 min = $\frac{2}{3}$ h pomakne za $\frac{2}{3} \cdot 30° = 20°$. 2 BODA

Veličina kuta između brojeva 3 i 8 na satu je $5 \cdot 30° = 150°$. 3 BODA

Veličina kuta između kazaljki iznosi $150° - 20° = 130°$. 3 BODA

………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Za 40 minuta velika se kazaljka od 12 sati pomakne za $\frac{40}{60} \cdot 360° = 240°$. 2 BODA

Za 3 sata mala se kazaljka od 12 sati pomakne za $\frac{3}{12} \cdot 360° = 90°$. 2 BODA

Za 40 minuta mala se kazaljka od 3 sata pomakne za $\frac{40}{12 \cdot 60} \cdot 360° = 20°$. 3 BODA

Dakle, za 3 sata i 40 minuta mala se kazaljka od 12 sati pomakne za $90° + 20° = 110°$. 1 BOD

Manji kut između kazaljki analognog sata u 3 sata i 40 minuta iznosi $240° - 110° = 130°$. 2 BODA

………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

Veličina kuta između dva uzastopna broja na satu iznosi $360° : 12 = 30°$. 2 BODA

U 3 sata i 40 minuta velika kazaljka je na broju 8.

Veličina kuta između brojeva 8 i 12 na analognom satu je $4 \cdot 30° = 120°$. 1 BOD

40 minuta je $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ sata. 1 BOD

Mala kazaljka za 1 sat prijeđe 30°, a za 40 minuta prijeđe $\frac{2}{3} \cdot 30° = 20°$. 2 BODA

Veličina kuta između brojeva 12 i 3 na analognom satu je $3 \cdot 30° = 90°$. 1 BOD

U 3 sata i 40 minuta mala kazaljka je od broja 12 udaljena za $90° + 20° = 110°$. 1 BOD

Veći kut između kazaljki je $120° + 110° = 230°$. 1 BOD

Manji kut između kazaljki je $360° - 230° = 130°$. 1 BOD

………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

Neka su $x_1, x_2, ..., x_{11}$ traženi prirodni brojevi i D($x_1, x_2, ..., x_{11}$) njihov najveći zajednički djelitelj.

Tada vrijedi $x_1 + x_2 + ... + x_{11} = 2016$. 1 BOD

Kako je svaki od pribrojnika $x_1, x_2, ..., x_{11}$ djeljiv s D($x_1, x_2, ..., x_{11}$), onda je i njihov zbroj odnosno 2016 djeljiv s D($x_1, x_2, ..., x_{11}$). 2 BODA

S obzirom da je $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, 1 BOD

onda je $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ najmanji mogući umnožak faktora veći od 11. 3 BODA

Dakle, najveća vrijednost koju može imati najveći zajednički djelitelj pribrojnika je $2016 : 12 = 168$. 3 BODA

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka su $x_1, x_2, ..., x_{11}$ traženi prirodni brojevi i D($x_1, x_2, ..., x_{11}$) njihov najveći zajednički djelitelj.

Tada vrijedi $x_1 + x_2 + ... + x_{11} = 2016$. 1 BOD

Kako je svaki od pribrojnika $x_1, x_2, ..., x_{11}$ djeljiv s D($x_1, x_2, ..., x_{11}$), onda je i njihov zbroj odnosno 2016 djeljiv s D($x_1, x_2, ..., x_{11}$). 2 BODA

Djelitelji broja 2016 su 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12,… 2 BODA

a najmanji među njima koji je veći od 11 je broj 12. 2 BODA

Dakle, najveća vrijednost koju može imati najveći zajednički djelitelj pribrojnika je $2016 : 12 = 168$. 3 BODA

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
23. veljače 2016.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Treba izračunati koliko je % poskupjela cijena materijala za izgradnju druge polovine zgrade sa 60 % udjela materijala uz poskupljenje 15%.

$15\% \cdot 60\% \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{100} \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{45}{1000} = 4.5\%$ 4 BODA

Na sličan izračunavamo koliko je posto poskupjela cijena rada izgradnje druge polovine zgrade sa 40% udjela uz poskupljenje 8 %.

$8\% \cdot 40\% \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{16}{1000} = 1.6\%$ 4 BODA

4.5% + 1.6% = 6.1 %. 1 BOD

Izgradnja stambene zgrade poskupjela je u odnosu na početnu cijenu za 6.1%. 1 BOD

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Troškovi materijala za izradu druge polovine zgrade čine 0.5 od 60 % = 30 % ukupnog troška izgradnje. Nakon povećanja od 15 %, trošak će biti 1.15 · 0.3 = 0.345 = 34.5% što je povećanje troškova za 4.5 %. 4 BODA

Troškovi cijene rada druge polovine zgrade čine 0.5 od 40 % = 20 % ukupnog troška izgradnje. Nakon povećanja od 8 %, trošak će biti 1.08 · 0.2 = 0.216 = 21.6 % što je povećanje troškova za 1.6 %. 4 BODA

Ukupno povećanje troškova u odnosu na početnu cijenu je 4.5 % + 1.6 % = 6.1 %. 2 BODA

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Troškovi materijala za izradu druge polovine zgrade čine 0.5 od 60 % = 30 % ukupnog troška izgradnje. Povećanjem cijene troškova materijala za 15 %, trošak će se povećati za

$0.15 \cdot 0.3 = 0.045 = 4.5\%$. 4 BODA

Troškovi cijene rada druge polovine zgrade čine 0.5 od 40 % = 20 % ukupnog troška izgradnje.

Povećanjem cijene rada za 8 %, trošak će se povećati za $0.08 \cdot 0.2 = 0.216 = 1.6$ %. 4 BODA

Ukupno povećanje troškova u odnosu na početnu cijenu je 4.5 % + 1.6 % = 6.1 %. 2 BODA

…...…………………………………………………...……………..… UKUPNO 10 BODOVA

2. Petorke znamenaka koje zadovoljavaju uvjet da je zbroj znamenaka traženih peteroznamenkastih brojeva 42 su: {9, 9, 9, 9, 6}, {9, 9, 9, 8, 7} i {9, 9, 8, 8, 8}. 3 BODA

Koristeći znamenke prve petorke moguće je odrediti 5 brojeva, ali 69 999 ne zadovoljava uvjet da peteroznamenkasti broj mora biti veći od 88 888.

Traženi brojevi su: 99 996, 99 969, 99 699, 96 999 2 BODA

Koristeći znamenke druge petorke moguće je odrediti $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) : (3 \cdot 2) = 20$ brojeva, ali 87 999, 79 998, 79 989, 79 899, 78 999 ne zadovoljavaju uvjet da peteroznamenkasti broj mora biti veći od 88 888.

Traženi brojevi su: 99 987, 99 978, 99 897, 99 879, 99 798, 99 789, 98 997, 98 979, 98 799, 97 998, 97 989, 97 899, 89 997, 89 979, 89 799. 2 BODA

Koristeći znamenke treće petorke moguće je odrediti $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) : (3 \cdot 2) : 2 = 10$ brojeva i svi zadovoljavaju uvjet da peteroznamenkasti broj mora biti veći od 88 888.

Traženi brojevi su: 99 888, 98 988, 98 898, 98 889, 89 988, 89 898, 89 889, 88 998, 88 989, 88 899. 2 BODA

Traženih brojeva ima ukupno 4 + 15 + 10 = 29. 1 BOD

…...…………………………………………………...……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Navedeni svi peteroznamenkasti brojevi, koji su rješenje zadatka, i odgovor bez obrazloženja boduju se s 10 bodova. Za rješenja koja su ponovljena ili pogrešna oduzimaju se bodovi, pri čemu se za svaka dva ponovljena / pogrešna rješenja oduzima po 1 bod i to do najviše 0 bodova.

3. Prvi način:

Ako kocke pokažu jednake brojeve, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 1.

Kako je 2415 : 3 = 805, Ante će dobiti 2 · 805 = 1610 kn, a Branko 805 kn. 2 BODA

Ako brojevi na kockama budu različiti, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 3.

Budući da je 2415 : 5 = 483, Ante dobiva 2 · 483 = 966 kn, a Branko 3 · 483 = 1449 kn. 3 BODA

Oba događaja "*Ante će dobiti više od 1000 kn*" i "*Branko će dobiti manje od 1000 kn*" zbivaju se u slučaju kada kockice pokažu iste brojeve. Dakle, oba događaja imaju jednaku vjerojatnost. 1 BOD

Događaji bacanja dviju kocaka mogu se prikazati kao uređeni parovi brojeva iz skupa

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ odnosno $\{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (6,5), (6,6)\}$. Ukupan broj događaja bacanja dviju kocaka je 6 · 6 = 36. Povoljni događaji mogu se prikazati kao skup uređenih parova

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$. Broj povoljnih događaja je 6. 2 BODA

Tražena vjerojatnost je $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.16666.... \approx 16.67\%$. 2 BODA

………………………………………………………………..………………..… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješenje prihvatiti u potpunosti neovisno o zapisu (razlomak, decimalni zapis, postotak).

Drugi način:

Ako kocke pokažu jednake brojeve, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 1.

U tom slučaju Ante će dobiti 2k kn, a Branko k kn, pri čemu je k racionalan broj.

Vrijedi da je $2k + k = 2415,\ 3k = 2415,\ k = 805$.

Ante će dobiti 2 · 805 = 1610 kn, a Branko 805 kn. 2 BODA

Ako brojevi na kockama budu različiti, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 3.

Tada će Ante dobiti 2l kn, a Branko 3l kn, pri čemu je l racionalan broj.

Budući da je $2l + 3l = 2415,\ 5l = 2415,\ l = 483$.

Ante dobiva 2 · 483 = 966 kn, a Branko 3 · 483 = 1449 kn. 3 BODA

Oba događaja "*Ante će dobiti više od 1000 kn*" i "*Branko će dobiti manje od 1000 kn*" zbivaju se u slučaju kada kockice pokažu iste brojeve. Dakle, oba događaja imaju jednaku vjerojatnost. 1 BOD

Događaji bacanja dviju kocaka mogu se prikazati kao uređeni parovi brojeva iz skupa

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ odnosno $\{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (6,5), (6,6)\}$. Ukupan broj događaja bacanja dviju kocaka je 6 · 6 = 36. Povoljni događaji mogu se prikazati kao skup uređenih parova

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$. Broj povoljnih događaja je 6. 2 BODA

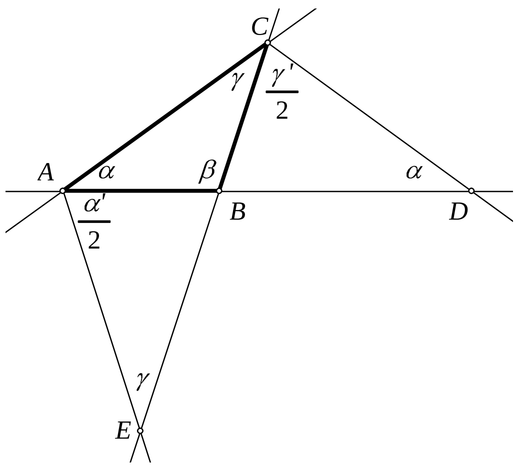
Tražena vjerojatnost je $P=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}=0.16666....\approx 16.67\%$. 2 BODA

….……………………………………………………..………………..… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješenje prihvatiti u potpunosti neovisno o zapisu (razlomak, decimalni zapis, postotak).

4. Prvi način:

Skica:



1 BOD

Neka je $|\measuredangle BAC|=\alpha$, $|\measuredangle CBA|=\beta$ i $|\measuredangle ACB|=\gamma$. Veličine odgovarajućih vanjskih kutova trokuta označimo α' i γ'.

$$\alpha' = 180° - \alpha$$
$$\frac{\alpha'}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

$$\gamma' = 180° - \gamma$$
$$\frac{\gamma'}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$$ 1 BOD

Trokut CAE je jednakokračan s osnovicom $\overline{CE}$ pa vrijedi da je $|\measuredangle CEA|=|\measuredangle ACB|=\gamma$.

Budući da je $|\measuredangle EAB|=\frac{\alpha'}{2}$ i $|\measuredangle ACE|+|\measuredangle EAC|+|\measuredangle CEA|=180°$, vrijedi jednadžba

$$\gamma+\alpha+\frac{\alpha'}{2}+\gamma=180°$$

$$2\gamma+\alpha+90°-\frac{\alpha}{2}=180°$$ 2 BODA

$$2\gamma+\frac{\alpha}{2}=90° \,/\cdot 2 \longrightarrow 4\gamma+\alpha=180° \longrightarrow \alpha=180°-4\gamma$$

Trokut ADC je jednakokračan s osnovicom $\overline{AD}$ pa vrijedi da je $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CDA| = \alpha$.

Budući da je $|\sphericalangle BCD| = \frac{\gamma'}{2}$ i $|\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle CDA| = 180°$, vrijedi jednadžba

$\alpha + \gamma + \frac{\gamma'}{2} + \alpha = 180°$

$2\alpha + \gamma + 90° - \frac{\gamma}{2} = 180°$ 2 BODA

$2\alpha + \frac{\gamma}{2} = 90° \ / \cdot 2 \ \longrightarrow 4\alpha + \gamma = 180°$

Dalje slijedi

$4(180° - 4\gamma) + y = 180°$

$720° - 16\gamma + \gamma = 180°$ 2 BODA

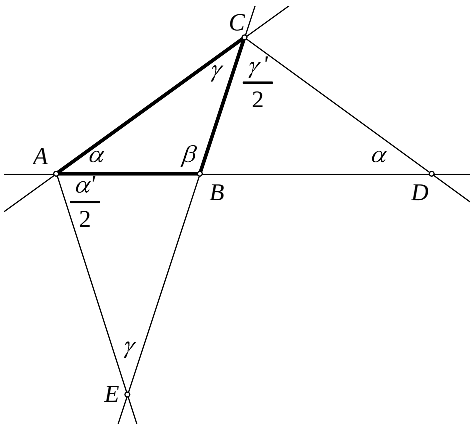
$\gamma = 36°$

$\alpha = 180° - 4 \cdot 36° = 36°$, $\beta = 180° - 2 \cdot 36° = 108°$. 2 BODA

…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica:



1 BOD

Neka je $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle CBA| = \beta$ i $|\sphericalangle ACB| = \gamma$. Veličine odgovarajućih vanjskih kutova trokuta označimo α' i γ'.

Tada je $\alpha' = \beta + \gamma$ i $\gamma' = \alpha + \beta$. 1 BOD

Trokut CAE je jednakokračan s osnovicom $\overline{CE}$ pa vrijedi da je $|\sphericalangle CEA| = |\sphericalangle ACB| = \gamma$. Za zbroj veličina kutova u trokutu CAE vrijedi $\gamma + \gamma + \left(\alpha + \frac{\beta + \gamma}{2}\right) = 180°$, odnosno $\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{5}{2}\gamma = 180°$.

2 BODA

Trokut ADC je jednakokračan s osnovicom $\overline{AD}$ pa vrijedi da je $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle CDA| = \alpha$. Za zbroj

veličina kutova u trokutu ADC vrijedi $\alpha + \alpha + \left(\gamma + \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 180°$, odnosno $\frac{5}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \gamma = 180°$.

2 BODA

Zbrajanjem dobivenih izraza nalazimo da je $\frac{7}{2}\alpha + \beta + \frac{7}{2}\gamma = 360°$, odakle, zbog činjenice da je

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$, slijedi da je $\frac{5}{2}\alpha + \frac{5}{2}\gamma = 180°$, odnosno da je $\alpha + \gamma = 72°$. 1 BOD

Oduzimanjem dobivenih izraza nalazimo da je $\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\gamma = 0$, odakle slijedi da je $\alpha - \gamma = 0$,

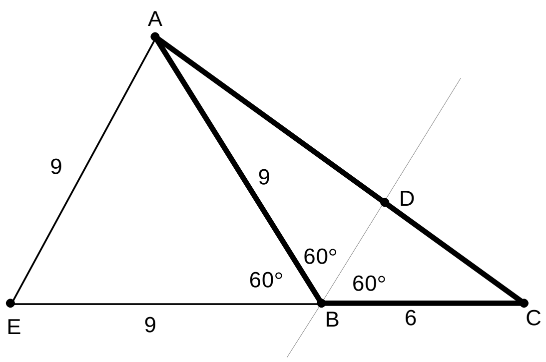
odnosno da je $\alpha = \gamma$. 1 BOD

Iz $\alpha + \gamma = 72°$ i $\alpha = \gamma$ zaključujemo da je $\alpha = \gamma = 36°$, pa je $\beta = 108°$. 2 BODA

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

Skica:



1 BOD

Produlji se stranica $\overline{BC}$ trokuta ABC preko točke B. Točkom A nacrta se pravac usporedan sa

simetralom kuta $\measuredangle CBA$. Sjecište tog pravca i pravca BC označimo s E. 1 BOD

Trokut AEB je jednakostraničan s duljinama stranica od 9 dm jer je $|\measuredangle EAB| = |\measuredangle CBD| = 60°$

(kutovi s usporednim kracima) i $|\measuredangle ABE| = 60°$ ($\measuredangle ABE$ i $\measuredangle CBA$ su sukuti, $|\measuredangle CBA| = 120°$)

pa je i veličina trećeg kuta $|\measuredangle BEA| = 60°$. 3 BODA

Trokut AEC sličan je trokutu DBC prema poučku o sličnosti trokuta K-K ($\measuredangle ACE$ zajednički kut

oba trokuta, $|\measuredangle BEA| = |\measuredangle CBD| = 60°$) te vrijedi: 2 BODA

$|BC|:|EC|=|BD|:|EA|$

$6:(6+9)=|BD|:9$

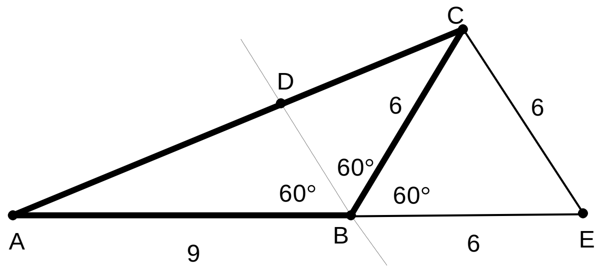
$15\cdot|BD|=54$ 3 BODA

$|BD|=3.6$ dm

…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica:



1 BOD

Produlji se stranica $\overline{AB}$ trokuta ABC preko točke *B*. Točkom *C* nacrta se pravac usporedan sa simetralom kuta $\measuredangle CBA$. Sjecište tog pravca i pravca AB označimo s *E*. 1 BOD

Trokut CBE je jednakostraničan s duljinama stranica od 6 dm jer je $|\measuredangle DBA|=|\measuredangle BCE|=60°$ (kutovi s usporednim kracima) i $|\measuredangle EBC|=60°$ ($\measuredangle EBC$ i $\measuredangle CBA$ su sukuti, $|\measuredangle CBA|=120°$) pa je i veličina trećeg kuta $|\measuredangle CEB|=60°$. 3 BODA

Trokut AEC sličan je trokutu ABD prema poučku o sličnosti trokuta K-K ($\measuredangle BAC$ zajednički kut oba trokuta, $|\measuredangle DBA|=|\measuredangle CEA|=60°$) te vrijedi: 2 BODA

$|AB|:|AE|=|BD|:|EC|$

$9:(6+9)=|BD|:6$

$15\cdot|BD|=54$ 3 BODA

$|BD|=3.6$ dm

…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
23. veljače 2016.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$\frac{5n^2-9}{2n+6}=\frac{5n^2-45+36}{2(n+3)}=\frac{5(n^2-9)+36}{2(n+3)}=\frac{5(n-3)(n+3)}{2(n+3)}+\frac{36}{2(n+3)}=\frac{5(n-3)}{2}+\frac{18}{n+3}$$ 4 BODA

Da bi vrijednost tog razlomka bila cijeli broj mora biti:

a) $n-3$ paran broj, odnosno n neparan broj, 1 BOD

b) $n+3 \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18\}$. 1 BOD

Kako je n neparan, onda je $n+3$ paran broj pa je $n+3 \in \{2, -2, 6, -6, 18, -18\}$. 2 BODA

Sada je $n \in \{-1, -5, 3, -9, 15, -21\}$. 2 BODA

……………………………………………………………..……………..….… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Svako pogođeno rješenje bez obrazloženja vrijedi po 1 bod.

Drugi način:

$$\frac{5n^2-9}{2n+6}=\frac{5\left(n^2-\frac{9}{5}\right)}{2(n+3)}=\frac{5}{2}\left[\frac{n(n+3)-3n-\frac{9}{5}}{(n+3)}\right]=$$

$$=\frac{5}{2}\left[n-\frac{3n+\frac{9}{5}}{n+3}\right]=\frac{5}{2}\left[n-\frac{3(n+3)-9+\frac{9}{5}}{n+3}\right]=$$

$$=\frac{5}{2}\left[n-3+\frac{\frac{36}{5}}{n+3}\right]=\frac{5}{2}(n-3)+\frac{5}{2}\cdot\frac{36}{5(n+3)}=$$

$$=\frac{5}{2}(n-3)+\frac{18}{n+3}$$ 4 BODA

Da bi vrijednost tog razlomka bila cijeli broj mora biti:

a) $n-3$ paran broj, odnosno n neparan broj, 1 BOD

b) $n+3 \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18\}$. 1 BOD

Kako je n neparan, onda je $n+3$ paran broj pa je $n+3 \in \{2, -2, 6, -6, 18, -18\}$. 2 BODA

Sada je $n \in \{-1, -5, 3, -9, 15, -21\}$. 2 BODA

…………………………………………………………..……………..….… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Svako pogođeno rješenje bez obrazloženja vrijedi po 1 bod.

2. Prvi način:

Ako je prvi broj x, onda se drugi može prikazati kao $10 - x$, a uvjet zadatka daje:

$x^2 : (10 - x)^2 = 1 : 16$. 2 BODA

Dalje slijedi: $16x^2 = (10 - x)^2$

$16x^2 = 100 - 20x + x^2$

$15x^2 + 20x - 100 = 0 \quad / : 5$

$3x^2 + 4x - 20 = 0$ 2 BODA

Ovu kvadratnu jednadžbu riješimo rastavljanjem srednjeg člana:

$3x^2 - 6x + 10x - 20 = 0$

$3x \cdot (x - 2) + 10 \cdot (x - 2) = 0$

$(x - 2) \cdot (3x + 10) = 0$ 2 BODA

Iz $x - 2 = 0$ je rješenje $x_1 = 2$, a iz $3x + 10 = 0$ je rješenje $x_2 = -\frac{10}{3}$. 2 BODA

Još se izračuna $10 - 2 = 8$ odnosno $10 - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{40}{3}$. 1 BOD

Konačno, $10 = 2 + 8$ i $10 = -\frac{10}{3} + \frac{40}{3}$. 1 BOD

……………………………….………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Ako je prvi broj x, onda se drugi može prikazati kao $10 - x$, a uvjet zadatka daje:

$x^2 : (10 - x)^2 = 1 : 16$. 2 BODA

Dalje slijedi $(x : (10 - x))^2 = (1 : 4)^2$ 2 BODA

pa je $\frac{x}{10 - x} = \frac{1}{4}$ ili $\frac{x}{10 - x} = -\frac{1}{4}$. 2 BODA

Prva mogućnost daje $4x = 10 - x$ te je rješenje $x_1 = 2$, a druga mogućnost daje $4x = -10 + x$

te je rješenje $x_2 = -\frac{10}{3}$. 2 BODA

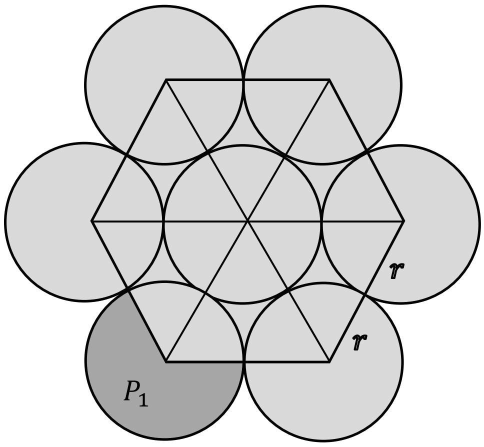
Još se izračuna $10 - 2 = 8$ odnosno $10 - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{40}{3}$. 1 BOD

Konačno, $10 = 2 + 8$ i $10 = -\frac{10}{3} + \frac{40}{3}$. 1 BOD

………………………………..………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

Skica: 1 BOD



Spojimo li središta vanjskih 6 krugova, dobit ćemo pravilni šesterokut stranice $a = 2r$. 1 BOD

Površina tog šesterokuta jednaka je šesterostrukoj površini jednakostraničnog trokuta stranice

$a = 2r$ odnosno $P_{\text{šesterokuta}} = 6 \cdot P_{\Delta} = 6 \cdot \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} = 6r^2\sqrt{3}$. 3 BODA

Preostala površina sastoji se od šest jednakih kružnih isječaka s pripadnim središnjim kutom 240°.

Svaki od njih ima površinu jednaku $\frac{2}{3}$ površine cijelog kruga. Dakle, $P_1 = \frac{2}{3} \cdot r^2\pi$. 3 BODA

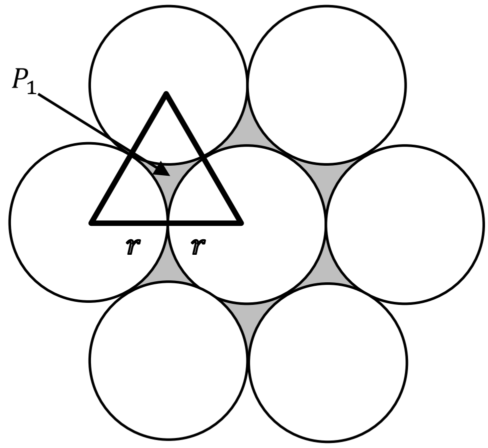
Prema tome, osjenčani lik ima površinu

$P = P_{\text{šesterokuta}} + 6P_1 = 6r^2\sqrt{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot r^2\pi = 6r^2\sqrt{3} + 4r^2\pi$. 2 BODA

………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica: 1 BOD



Lik se sastoji od 7 jednakih krugova površine $P_{\text{kruga}} = r^2\pi$ i šest jednakih (nepravilnih) dijelova površine P_1 (vidi sliku). 1 BOD

Površina nepravilnog lika P_1 može se izračunati kao površina jednakostraničnog trokuta stranice $2r$ umanjena za površinu tri jednaka kružna isječka središnjeg kuta 60°, točnije, za tri šestine površine kruga polumjera r. 2 BODA

Površina jednakostraničnog trokuta je $P_\Delta = \dfrac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} = r^2\sqrt{3}$. 2 BODA

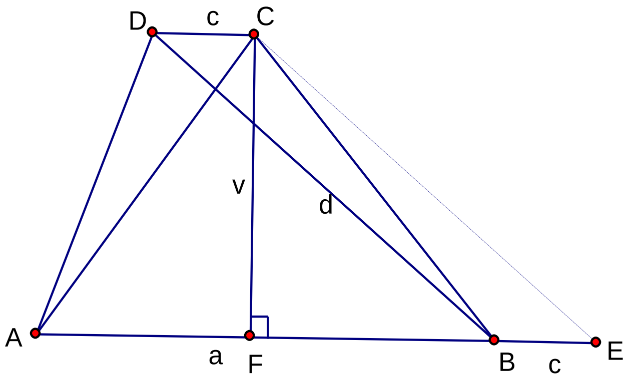
Dakle, $P_1 = P_\Delta - \dfrac{1}{2}P_{\text{kruga}} = r^2\sqrt{3} - \dfrac{r^2\pi}{2}$. 2 BODA

Prema tome, osjenčani lik ima površinu

$$P = 7P_{\text{kruga}} + 6P_1 = 7r^2\pi + 6\cdot\left(r^2\sqrt{3} - \frac{r^2\pi}{2}\right) = 7r^2\pi + 6r^2\sqrt{3} - 3r^2\pi = 6r^2\sqrt{3} + 4r^2\pi .$$ 2 BODA

……………………………..……………………….…………………………… UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:



Skica: 1 BOD

Zadana se jednadžba može zapisati u obliku $d^2 - 30d + v^2 - 24v + 369 = 0$

odnosno nadopunom na potpuni kvadrat $(d - 15)^2 - 225 + (v - 12)^2 - 144 + 369 = 0$

i konačno $(d - 15)^2 + (v - 12)^2 = 0$. 2 BODA

Lijeva strana jednadžbe jednaka je 0 ako je $d - 15 = 0$ i $v - 12 = 0$. 1 BOD

Iz $d - 15 = 0$ slijedi da je $d = 15$ cm, a

iz $v - 12 = 0$ slijedi da je $v = 12$ cm. 1 BOD

Na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha B odaberimo točku E tako da je $d(B,E) = d(C,D)$.

Tada je $d(A,E) = a + c$.

Četverokut $BECD$ je paralelogram pa je $d(C,E) = d = 15$ cm. 1 BOD

Iz pravokutnog trokuta ΔAFC dobiva se $d(A,F) = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\,\text{cm}$, a

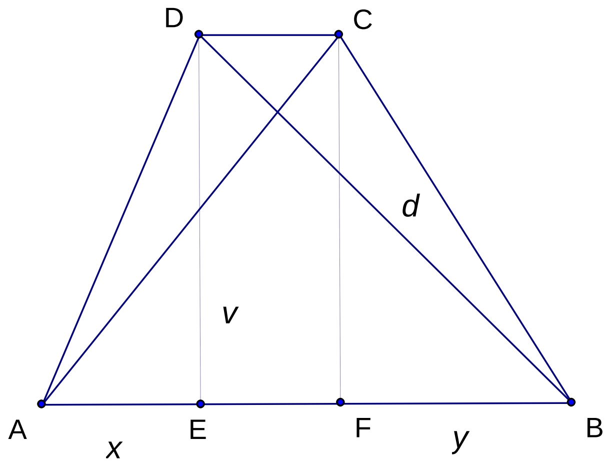
iz pravokutnog trokuta ΔCFE $d(F,E) = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9\,\text{cm}$. 2 BODA

Kako je $d(A,F) + d(F,E) = d(A,E) = d(A,B) + d(B,E) = a + c = 5 + 9 = 14$ cm,

površina trapeza je $P = \dfrac{a+c}{2} \cdot v = 84\,\text{cm}^2$. 2 BODA

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



Skica: 1 BOD

Zadana se jednadžba može zapisati u obliku $d^2 - 30d + v^2 - 24v + 369 = 0$

odnosno nadopunom na potpuni kvadrat $(d - 15)^2 - 225 + (v - 12)^2 - 144 + 369 = 0$

i konačno $(d - 15)^2 + (v - 12)^2 = 0$. 2 BODA

Lijeva strana jednadžbe jednaka je 0 ako je $d - 15 = 0$ i $v - 12 = 0$. 1 BOD

Iz $d - 15 = 0$ slijedi da je $d = 15$ cm, a

iz $v - 12 = 0$ slijedi da je $v = 12$ cm. 1 BOD

Neka su E i F nožišta visina iz vrhova D i C redom na osnovicu $\overline{AB}$.

Nadalje, neka je $|AE| = x$ i $|BF| = y$, a $|CD| = c$, $|AB| = a$.

Kako je četverokut $EFCD$ pravokutnik, slijedi $|EF| = c$. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokute ΔDEB i ΔAFC dobije se $|BE| = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm i

$|AF| = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ cm. 2 BODA

Slijedi $|BE| = c + y = 9$, $|AF| = x + c = 5$.

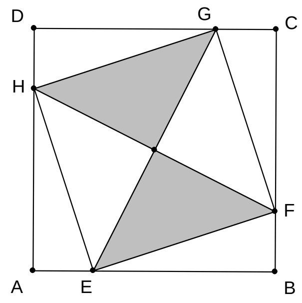
Zbrajanjem tih dviju jednakosti dobije se $x + y + 2c = 14$ odnosno $x + c + y + c = 14$, tj.

$a + c = 14$. 1 BOD

Površina trapeza je $P = \dfrac{a + c}{2} \cdot v = 84\,\text{cm}^2$. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:



Neka je a duljina stranice kvadrata.

Tada je $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = \frac{1}{4}a$, $|BE| = |CF| = |DG| = |AH| = \frac{3}{4}a$. 1 BOD

Trokuti ΔHAE, ΔEBF, ΔFCG i ΔGDH su međusobno sukladni (pravokutni trokuti sa sukladnim stranicama duljina $\frac{1}{4}a$ i $\frac{3}{4}a$, prema poučku S-K-S o sukladnosti). 1 BOD

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi $|FE| = |GF| = |HG| = |EH| = x$. 1 BOD

Promotrimo trokut ΔHAE.

Neka je $|\measuredangle AEH| = \alpha$ i $|\measuredangle EHA| = \beta$. Vrijedi $\alpha + \beta = 90°$.

Zbog sukladnosti trokuta ΔHAE i ΔEBF je $|\measuredangle BEF| = \beta$.

Zato je $|\measuredangle HEF| = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 90° = 90°$.

Na isti način može se pokazati da je $|\measuredangle EFG| = |\measuredangle FGH| = |\measuredangle GHE| = 90°$. 2 BODA

Četverokut *EFGH* je kvadrat jer ima sve stranice jednake duljine i sve kutove prave. 1 BOD

Zatamnjeni dio čini polovinu kvadrata *EFGH*.

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ΔHAE dobivamo $\left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = x^2$. 1 BOD

Nakon kvadriranja i zbrajanja slijedi $x^2 = \frac{5}{8}a^2$. 1 BOD

Kako je $a^2 = 80$, (površina zadanog kvadrata), slijedi $x^2 = \frac{5}{8} \cdot 80 = 50$. 1 BOD

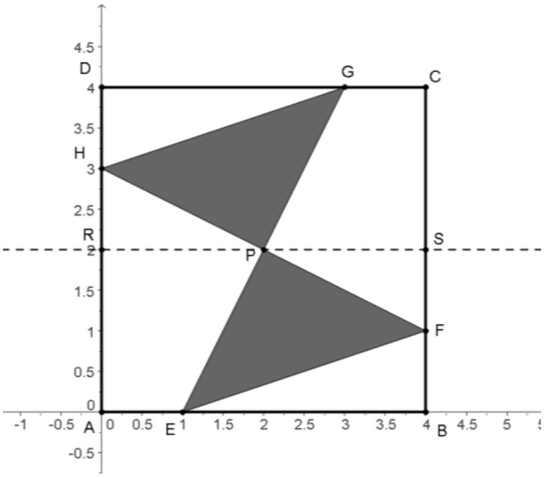
Površina kvadrata *EFGH* iznosi 50 cm^2, a zatamnjenog dijela 25 cm^2. 1 BOD

……………………...……………………………………….……………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješenje bez dokaza da je četverokut *EFGH* kvadrat boduje se s najviše 6 bodova.

Drugi način:

Postavimo kvadrat *ABCD* u pravokutni koordinatni sustav kao na slici.



1 BOD

Neka je a duljina stranice kvadrata.

Tada je $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = \frac{1}{4}a$, $|BE| = |CF| = |DG| = |AH| = \frac{3}{4}a$. 1 BOD

Vrijedi $EG \equiv y = 2x - 2$ i $FH \equiv y = -\frac{1}{2}x + 3$ 2 BODA

pa točka P kao presjek tih pravaca ima koordinate $P(2,2)$. 1 BOD

Dalje je $|HR| = |FS| = \frac{1}{4}a$ i $|RP| = |PS| = \frac{1}{2}a$. 1 BOD

Neka je P_1 površina trokuta DHG, P_2 površina trokuta HRP, P_3 površina trapeza $CGPS$,

P_K površina kvadrata *ABCD* i P površina zatamnjenog dijela.

Vrijedi $P_1 = \frac{\frac{a}{4} \cdot \frac{3a}{4}}{2} = \frac{3}{32}a^2 = 7.5\,\text{cm}^2$, $P_2 = \frac{\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{1}{16}a^2 = 5\,\text{cm}^2$ i

$P_3 = \frac{\frac{a}{4} + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{16}a^2 = 15\,\text{cm}^2$. 3 BODA

S obzirom da je slika centralnosimetrična s obzirom na točku P, vrijedi

$P = P_K - 2 \cdot (P_1 + P_2 + P_3) = 80 - 2 \cdot 27.5 = 25\,\text{cm}^2$. 1 BOD

……………………...…………………………………….……………… UKUPNO 10 BODOVA