ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

21. siječnja 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Postoje li tri uzastopna cijela broja čiji je zbroj kvadrata djeljiv s 2016?

Rješenje.

Zbroj kvadrata tri uzastopna cijela broja je $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$. 1 bod

Taj zbroj iznosi $3n^2 + 6n + 5$. 1 bod

Broj $3n^2 + 6n + 5$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, pa nije djeljiv s 3. 2 boda

Broj 2016 je djeljiv s 3, pa broj koji nije djeljiv s 3 nije djeljiv ni s 2016. 1 bod

Dakle, zbroj kvadrata tri uzastopna cijela broja ne može biti djeljiv s 2016. 1 bod

Napomena: Učenici mogu zbroj kvadrata tri uzastopna cijela broja zapisati na razne (više ili manje elegantne) načine, npr. kao $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2$.

Napomena: Odgovor bez obrazloženja nosi 0 bodova.

Zadatak A-1.2.

Anja i Vanja su sudjelovale u utrci. Broj trkača koji su završili utrku prije Anje jednak je broju trkača koji su završili nakon nje. Broj trkača koji su završili utrku prije Vanje je tri puta veći od broja trkača koji su završili nakon nje. Točno 10 trkača završilo je utrku između Anje i Vanje. Ako su svi trkači završili utrku, te nikoja dva trkača nisu završila u isto vrijeme, odredi ukupan broj trkača.

Prvo rješenje.

Iz uvjeta zadatka je jasno da je Anja stigla prije Vanje. Neka je A broj trkača koji su završili utrku prije Anje, a B broj trkača koji su završili nakon Vanje.

Broj trkača možemo grafički prikazati ovako

$$A \quad - \quad \text{Anja} \quad - \quad 10 \quad - \quad \text{Vanja} \quad - \quad B.$$

Tada vrijedi

$$A = 10 + 1 + B, \qquad \text{2 boda}$$
$$A + 1 + 10 = 3B. \qquad \text{2 boda}$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo $A = 22$, $B = 11$. 1 bod

Ukupno je na utrci sudjelovalo $A + B + 12 = 45$ trkača. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je n ukupni broj trkača koji su sudjelovali u utrci.

Budući da je jednak broj trkača koji su završili utrku prije i nakon Anje, broj trkača koji su utrku završili prije Anje dobivamo tako da broj trkača različitih od Anje podijelimo sa 2. Dakle, broj trkača koji su utrku završili prije Anje je $\frac{1}{2}(n-1)$. 1 bod

Broj trkača koji su završili prije Vanje tri puta veći od broja trkača koji su završili nakon nje, pa je broj trkača koji su utrku završili nakon Vanje jednak $\frac{1}{4}(n-1)$. 2 boda

Anja je završili utrku prije Vanje. Zato sve trkače različite od Anje i Vanje možemo podijeliti na one trkače koji su završili utrku prije Anje, na one između Anje i Vanje, te na one koji su utrku završili nakon Vanje.

Zato je

$$n-2=\frac{1}{2}(n-1)+10+\frac{1}{4}(n-1).$$ 2 boda

Rješenje ove jednadžbe je $n=45$. 1 bod

Ukupni broj trkača je 45.

Zadatak A-1.3.

Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $a^2+b^2=8$ i $a^6+b^6=416$.

Odredi ab.

Rješenje.

Prema formuli za kub binoma dobivamo:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)^3 &= a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6 && \text{1 bod}\\ &= a^6+b^6+3a^2b^2(a^2+b^2). && \text{2 boda}\end{aligned}$$

Uvrštavanjem podataka iz zadatka u gornju jednakost dobivamo:

$$8^3=416+3a^3b^3\cdot 8.$$ 1 bod

Sređivanjem dobivamo $a^2b^2=4$. 1 bod

Budući da su a i b pozitivni, slijedi $ab>0$, pa je $ab=2$. 1 bod

Napomena: Uvjeti zadatka jedinstveno određuju a i b. To su brojevi $\sqrt{3}-1$ i $\sqrt{3}+1$. Ako želimo, brojeve a i b možemo odrediti na sljedeći način.

Jednom kad znamo $ab=2$, prvo izračunamo $a+b$ iz $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=12$. Nakon toga dobivamo sustav $ab=2$, $a+b=2\sqrt{3}$ koji vodi na kvadratnu jednadžbu $a^2-2\sqrt{3}a+2=0$.

Učenici prvog razreda kvadratnu jednadžbu mogu riješiti metodom upotpunjavanja do potpunog kvadrata. No, od učenika se u ovom zadatku ne traži niti ne očekuje da odrede brojeve a i b.

Zadatak A-1.4.

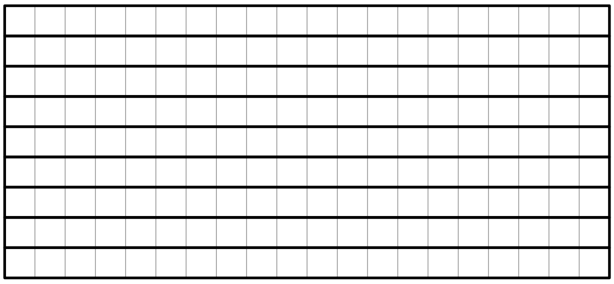
Od devet sukladnih pravokutnika čije dužina i širina su prirodni brojevi sastavljena je pravokutna ploča dimenzija 20×9. Kojih sve dimenzija mogu biti polazni pravokutnici?

Rješenje.

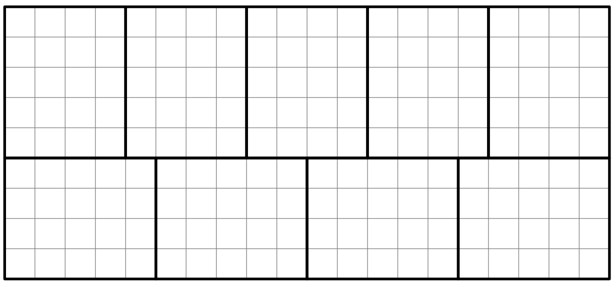
Budući da koristimo 9 sukladnih pravokutnika, a ukupna površina ploče iznosi $9 \cdot 20$, zaključujemo da svaki pravokutnik ima površinu 20.

Budući da pravokutnici imaju cjelobrojne dimenzije, možemo odbaciti sve dimenzije pravokutnika različite od ove 3 mogućnosti: 1×20, 2×10 i 4×5. 1 bod

Dimenzije 1×20 su moguće jer 9 takvih pravokutnika možemo složiti jednog do drugog. 1 bod



Dimenzije 4×5 su moguće jer 9 takvih pravokutnika možemo složiti tako da 4 stavimo jednog do drugog po dužini ploče, a ostale pravokutnike okomito na njih. 2 boda



Dimenzije 2×10 nisu moguće jer se takvim pravokutnicima može popločiti samo ploča kojoj su širina i dužina parni brojevi. 2 boda

Napomena: Za dimenzije 1×20 i 4×5, učenik mora dati primjer. Dovoljno je primjer nacrtati ili opisati riječima (nije potrebno oboje).

Napomena: Učenici mogu pokazati da dimenzije 2×10 nisu moguće i na sljedeći način.

Budući da je dužina ploče 9, pravokutnici dimenzija 2×10 mogu biti položeni samo tako da im je stranica duljine 10 paralelna sa stranicom ploče duljine 20. (1 bod)

Zbog toga bismo po dva takva pravokutnika morali složiti jedan kraj drugog tako da formiraju pravokutnik 2×20. Nakon što složimo 4 takva para pravokutnika, preostaje nam dio ploče dimenzija 1×20 koji ne možemo popločiti jednim preostalim pravokutnikom. (1 bod)

Zadatak A-1.5.

Dan je kvadrat $ABCD$ stranice duljine a. Vrhovi A i C središta su dviju kružnica koje prolaze točkama B i D. Ako su sjecišta tih kružnica s dijagonalom $\overline{AC}$ točke M i N, odredi površinu četverokuta $BMDN$.

Prvo rješenje.

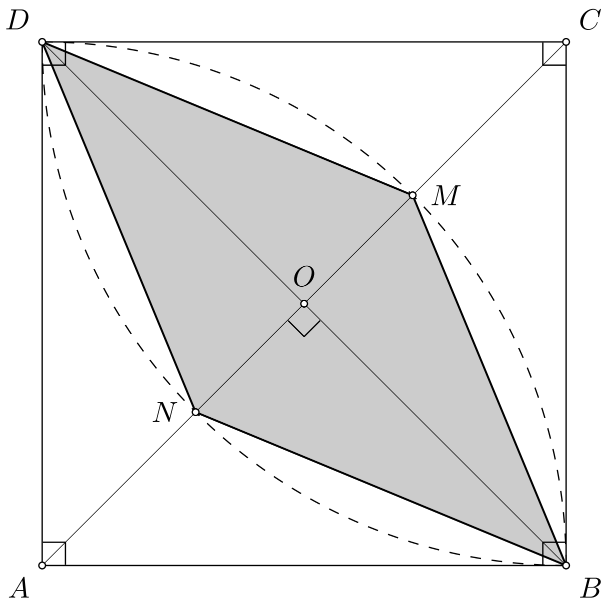
Dijagonale kvadrata imaju duljinu $|AC| = |BD| = a\sqrt{2}$.

Budući da su točke B i N na kružnici sa središtem C, vrijedi

$$|AN| = |AC| - |NC| = a\sqrt{2} - |BC| = (\sqrt{2} - 1)a.$$ 1 bod

Analogno vidimo $|CM| = (\sqrt{2} - 1)a$. Stoga je

$$|MN| = |AC| - |AN| - |CM| = (2 - \sqrt{2})a.$$ 2 boda



Neka je O središte kvadrata. Budući da su dijagonale kvadrata okomite, dužina $\overline{BO}$ je visina na stranicu $\overline{MN}$ u trokutu BMN. 1 bod

Zato je

$$P(BMN) = \frac{|MN| \cdot |BO|}{2} = \frac{(2 - \sqrt{2})a \cdot a\sqrt{2}}{4} = \frac{(\sqrt{2} - 1)a^2}{2}.$$ 1 bod

Analogno je

$$P(DNM) = \frac{|MN| \cdot |DO|}{2} = \frac{(\sqrt{2} - 1)a^2}{2}.$$

Konačno, površina četverokuta $BMDN$ je jednaka

$$P(BMDN) = P(BMN) + P(DNM) = (\sqrt{2} - 1)a^2.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju izračunamo $|MN| = (2 - \sqrt{2})a$. 3 boda

Dijagonale četverokuta $BMDN$ leže na dijagonalama kvadrata, pa se sijeku pod pravim kutom. 1 bod

Zato njegova površina iznosi

$$P(BMDN) = \frac{|MN| \cdot |BD|}{2}.$$ 1 bod

Slijedi da je $P(BMDN) = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})a \cdot a\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)a^2$. 1 bod

Zadatak A-1.6.

Duljine kateta pravokutnog trokuta su a i b, a duljina njegove hipotenuze c. Ako je veličina jednog kuta $75°$, dokaži da vrijedi $c^2 = 4ab$.

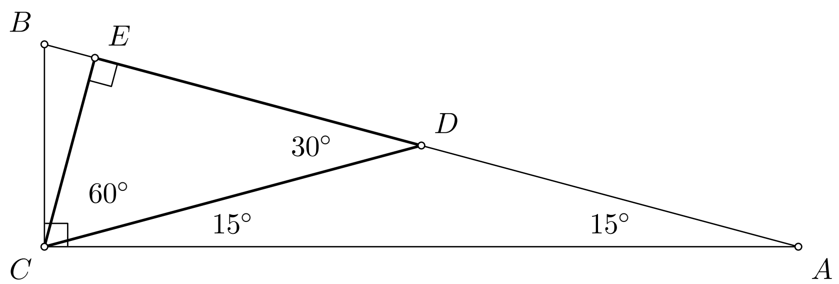
Prvo rješenje.

Neka je ABC zadani trokut. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\sphericalangle ACB = 90°$ i $\sphericalangle ABC = 75°$. Neka je $a = |BC|$, $b = |AC|$ i $c = |AB|$.

Neka je v duljina visine trokuta ABC. Budući da vrijedi $ab = cv$ (što možemo vidjeti npr. izražavajući površinu trokuta ABC na dva načina), dovoljno je dokazati $c = 4v$. 2 boda

Neka je točka D polovište hipotenuze. Budući da je trokut ABC pravokutan, točka D je središte opisane kružnice, pa vrijedi $|AB| = 2|CD|$. 2 boda

Drugi kut uz hipotezu iznosi $\sphericalangle BAC = 15°$. Budući da je trokut ADC jednakokračan, vrijedi $\sphericalangle DCA = 15°$. 1 bod



Neka je E nožište visine iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$. Uočimo da je $\sphericalangle CDE$ vanjski kut trokuta ADC, pa je $\sphericalangle CDE = 30°$. 2 boda

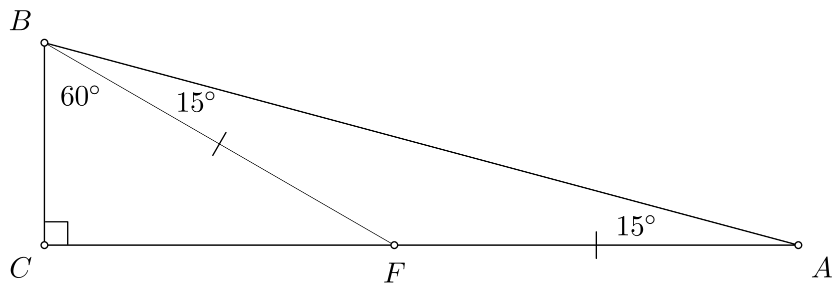
Trokut CDE ima kutove $30°$, $60°$, $90°$, tj. CDE je polovica jednakostraničnog trokuta. Zato je $|CD| = 2|CE|$. 2 boda

Zaključujemo da je $c = |AB| = 2|CD| = 4|CE| = 4v$. 1 bod

Drugo rješenje.

Uvedimo oznake kao u prvom rješenju.

Neka je F točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $\sphericalangle CBF = 60^\circ$ i $\sphericalangle FBA = 15^\circ$. 2 boda



Tada je BCF polovica jednakostraničnog trokuta, tj. vrijedi $|BF| = 2a$. 2 boda

Dužina $\overline{CF}$ je visina tog trokuta, pa je $|CF| = a\sqrt{3}$. 1 bod

Drugi kut uz hipotenuzu iznosi $\sphericalangle BAC = 15^\circ$, pa je $|AF| = |BF|$. 1 bod

No, vrijedi i $|CF| = |AC| - |AF| = b - 2a$, pa izjednačavanjem dobivamo $a\sqrt{3} = b - 2a$, odakle je $b = a(2+\sqrt{3})$. 2 boda

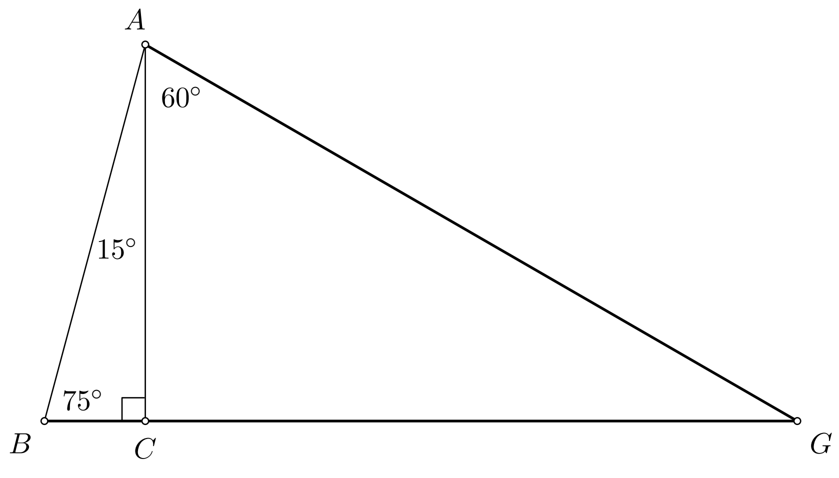
Konačno, prema Pitagorinom poučku slijedi

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2(2+\sqrt{3})^2 = a^2(8+4\sqrt{3}) = 4a \cdot a(2+\sqrt{3}) = 4ab.$$ 2 boda

Treće rješenje.

Uvedimo oznake kao u prvom rješenju.

Neka je točka G na produžetku stranice $\overline{BC}$ preko vrha C takva da je $\sphericalangle BAG = 75^\circ$, tj. da je $|BG| = |AG|$. 2 boda



Drugi kut uz hipotenuzu iznosi $\sphericalangle BAC = 15^\circ$, pa je $\sphericalangle CAG = 60^\circ$. 1 bod

Zato je ACG polovica jednakostraničnog trokuta, tj. $|GA| = 2b$. 2 boda

Sada možemo izračunati površinu trokuta ABG:

$$P(ABG)=\frac{|BG|\cdot|AC|}{2}=\frac{|AG|\cdot|AC|}{2}=\frac{2b\cdot b}{2}=b^2.$$ 1 bod

Površina trokuta ACG iznosi $\dfrac{b^2\sqrt{3}}{2}$. 1 bod

Izrazimo li površinu trokuta ABG na drugi način, kao zbroj površina trokuta ABC i ACG, dobivamo

$$P(ABG)=P(ABC)+P(ACG)=\frac{ab}{2}+\frac{b^2\sqrt{3}}{2}.$$

Izjednačavanjem slijedi $b^2=\dfrac{ab}{2}+\dfrac{b^2\sqrt{3}}{2}$, tj. $a=b(2-\sqrt{3})$. 1 bod

Prema Pitagorinom poučku imamo

$$c^2=a^2+b^2=b^2(2-\sqrt{3})^2+b^2=b^2(8-4\sqrt{3})=4b\cdot b(2-\sqrt{3})=4ab.$$ 2 boda

Zadatak A-1.7.

Na otoku je 20 klubova. Svaki stanovnik otoka je član jednog ili dva kluba. Svaki klub ima najviše 25 članova, te za svaki par klubova postoji stanovnik koji je član oba kluba. Odredi najmanji i najveći mogući broj stanovnika otoka.

Prvo rješenje.

Broj parova klubova je $\frac{20\cdot 19}{2}=190$. 2 boda

Za svaki par klubova postoji stanovnik koji je član oba kluba. Za svaki par (i,j) takav da je $1\leqslant i<j\leqslant 20$ odaberimo i označimo sa A_{ij} jednog stanovnika koji je član i-tog i j-tog kluba.

Stanovnici A_{ij} su svi različiti zbog uvjeta da svaki stanovnik može biti član najviše dva kluba. To pokazuje da na otoku mora biti barem 190 stanovnika. 2 boda

S druge strane, ako se na otoku nalaze samo stanovnici A_{ij}, $1\leqslant i<j\leqslant 20$, uvjeti zadatka su zadovoljeni. Zato je najmanji mogući broj stanovnika točno 190 (a ne veći). 1 bod

Za fiksan i, u i-tom klubu se nalazi barem 19 stanovnika A_{ij} za $1\leqslant j\leqslant 20$, $j\neq i$. Zbog toga se u svakom klubu može nalaziti još najviše 6 stanovnika. 2 boda

To pokazuje da ukupan broj stanovnika ne može biti veći od $190+20\cdot 6=310$. 2 boda

No, ako u svaki klub uz stanovnike A_{ij} stavimo po 6 stanovnika koji se nalaze samo u jednom klubu, uvjeti zadatka su zadovoljeni. Zato je najveći mogući broj stanovnika točno 310 (a ne manji). 1 bod

Drugo rješenje.

Prema uvjetu zadatka mora postojati stanovnik koji je član prvog i drugog kluba. Označimo tu osobu sa A i naznačimo da je A član tih klubova u tablici u kojoj po retcima redom zapisujemo članove klubova.

Budući da osoba A može biti član najviše dva kluba, ta osoba se ne može pojavljivati ni na kojem drugom mjestu u tablici. 1 bod

Slično možemo naznačiti da je osoba B član prvog i trećeg kluba, da je osoba C član prvog i četvrtog kluba, da je osoba D član drugog i trećeg kluba itd.

	1	2	3	...
1. klub	A	B	C	...
2. klub	A	D	...	
3. klub	B	D	...	
4. klub	C	...		
$\vdots$				

Nastavimo li ovako razmišljati u tablicu ćemo upisati jednu osobu na dva mjesta za svaki par klubova.

Broj parova klubova je $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$. 2 boda

Iz toga zaključujemo da na otoku ne može biti manje od 190 stanovnika. 1 bod

Iz načina na koji smo formirali tablicu je vidljivo da ne moramo dodati nijednog drugog stanovika, tj. 190 stanovnika možemo rasporediti po klubovima tako da svi uvjeti zadatka budu zadovoljeni. 1 bod

Prvi klub mora imati zajedničkog člana sa svakim od klubova $2, 3, \ldots, 20$, pa zaključujemo da prvi klub ima barem 19 članova.

Na isti način zaključujemo da svaki klub ima barem 19 članova. Budući da svaki klub može imati najviše 25 članova, u svakom klubu se može nalaziti još najviše 6 stanovnika. 2 boda

To pokazuje da ukupan broj stanovnika ne može biti veći od $190 + 20 \cdot 6 = 310$. 2 boda

Ako u svaki klub, uz 19 stanovnika za koje znamo da moraju biti članovi tog kluba, stavimo po 6 stanovnika koji se će biti članovi samo tog kluba, svi uvjeti zadatka će biti zadovoljeni. Zato je najveći mogući broj stanovnika točno 310 (a ne manji). 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

21. siječnja 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve realne brojeve c za koje je jedno rješenje kvadratne jednadžbe

$$27x^2 - 12x + c = 0$$

kvadrat drugog rješenja.

Rješenje.

Neka su b i b^2 rješenja zadane jednadžbe.

Prema Vièteovoj formuli za zbroj rješenja vrijedi $b + b^2 = \dfrac{12}{27}$. 2 boda

Rješenja te jednadžbe su $b_1 = \frac{1}{3}$ i $b_2 = \frac{-4}{3}$. 1 bod

Prema Vièteovoj formuli za umnožak rješenja vrijedi $b \cdot b^2 = \dfrac{c}{27}$, tj. $c = 27b^3$. 2 boda

Stoga imamo $c_1 = 1$ i $c_2 = -64$. 1 bod

Zadatak A-2.2.

Neka je $a = 123456789$ i $N = a^3 - 2a^2 - 3a$. Dokaži da je broj N djeljiv s 540.

Rješenje.

Rastav broja 540 na proste faktore glasi $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$. 1 bod

Dovoljno je dokazati da je N djeljiv s 4, 5 i 27.

Zapišimo N u obliku umnoška $N = a(a-3)(a+1)$. 1 bod

Broj a je neparan pa su $a+1$ i $a-3$ parni brojevi i N je djeljiv sa 4. 1 bod

Broj a daje ostatak 4 pri dijeljenju s 5, pa je $a+1$ djeljiv s 5. Iz toga slijedi da je N djeljiv s 5. 1 bod

Suma znamenaka od a je 45, pa je a djeljiv s 9. 1 bod

Budući da je a djeljiv s 3 i $a-3$ je djeljiv s 3. Zaključujemo da je $a(a-3)$, pa onda i N, djeljiv s 27. 1 bod

Time je dokaz završen.

Zadatak A-2.3.

Neka je $w \neq 1$ kompleksni broj takav da vrijedi $|w| = 1$ i neka je $z = \dfrac{2}{1-w}$.

Odredi $\operatorname{Re} z$.

Prvo rješenje.

Neka je $w = a + bi$ za realne a i b. Uvjet $|w| = 1$ je ekvivalentan sa $a^2 + b^2 = 1$. 1 bod

Broj z možemo zapisati na sljedeći način

$$z = \frac{2}{1-a-bi} = \frac{2}{1-a-bi} \cdot \frac{1-a+bi}{1-a+bi} = \frac{2(1-a+bi)}{(1-a)^2+b^2}.$$ 2 boda

Realni dio broja z iznosi $\dfrac{2(1-a)}{(1-a)^2+b^2}$. 1 bod

Iskoristimo li uvjet $a^2 + b^2 = 1$, dobivamo

$$\operatorname{Re} z = \frac{2(1-a)}{(1-a)^2+b^2} = \frac{2(1-a)}{1-2a+a^2+b^2} = \frac{2(1-a)}{1-2a+1} = 1.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Budući da je $|w| = 1$, vrijedi $\overline{w} = \dfrac{1}{w}$. 1 bod

Zato je

$$\overline{z} = \frac{2}{1-\overline{w}} = \frac{2}{1-\frac{1}{w}} = \frac{2w}{1-w}.$$ 2 boda

Realni dio broja z možemo izračunati prema formuli $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$. 1 bod

Konačno računamo

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1-w} + \frac{2w}{w-1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2-2w}{1-w} = 1.$$ 2 boda

Treće rješenje.

Izrazimo w preko z:

$$z = \frac{2}{1-w} \quad \Longrightarrow \quad z - zw = 2 \quad \Longrightarrow \quad w = \frac{z-2}{z}.$$ 1 bod

Primijenimo li modul na relaciju $w = \dfrac{z-2}{z}$ dobivamo

$$1 = |w| = \frac{|z-2|}{|z|}.$$ 2 boda

Dakle $|z-2| = |z|$, što znači da z leži na simetrali dužine određene točkama 0 i 2 u kompleksnoj koordinatnoj ravnini. 1 bod

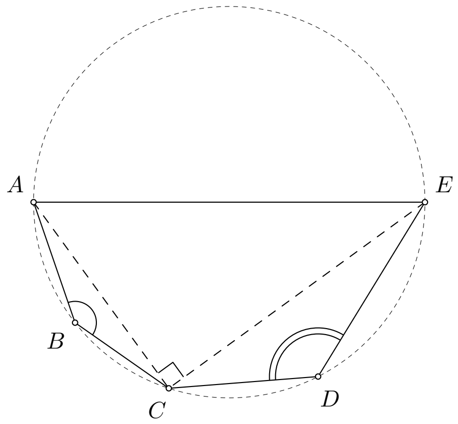
Ta simetrala je upravo pravac $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 1\}$, odnosno $\operatorname{Re} z = 1$. 2 boda

Zadatak A-2.4.

Točke A, B, C, D, E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$.

Odredi $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE$.

Rješenje.



Četverokut $ABCE$ je tetivan pa je $\sphericalangle ABC = 180° - \sphericalangle AEC$. 2 boda

Slično, četverokut $ACDE$ je tetivan pa je $\sphericalangle CDE = 180° - \sphericalangle CAE$. 1 bod

Prema Talesovom poučku je trokut ACE pravokutan, pa vrijedi $\sphericalangle CAE + \sphericalangle AEC = 90°$. 1 bod

Sada zbrajanjem dobivamo $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE = 360° - 90° = 270°$. 2 boda

Zadatak A-2.5.

Jednog jutra, 11 prijatelja odlučilo je obojati veliku ogradu. Bojanje je počelo u 9 sati i završilo u 16 sati. Svatko je započeo na puni sat i radio točno dva sata. Možemo li biti sigurni da je u nekom periodu istovremeno radilo barem četvero prijatelja?

Rješenje.

Svaka osoba će raditi po dva sata, pa će svi prijatelji zajedno raditi ukupno $11 \cdot 2 = 22$ radna sata. 1 bod

Svaka osoba svoja dva radna sata raspoređuje na 7 mogućih termina (s početkom u 9, 10, ..., 14, 15 sati). 2 boda

Ako bi u svakom od 7 termina radilo istovremeno najviše troje prijatelja, ukupni broj radnih sati bi iznosio $7 \cdot 3 = 21$. 2 boda

Dakle, u nekom od 7 termina mora raditi barem četvero prijatelja. 1 bod

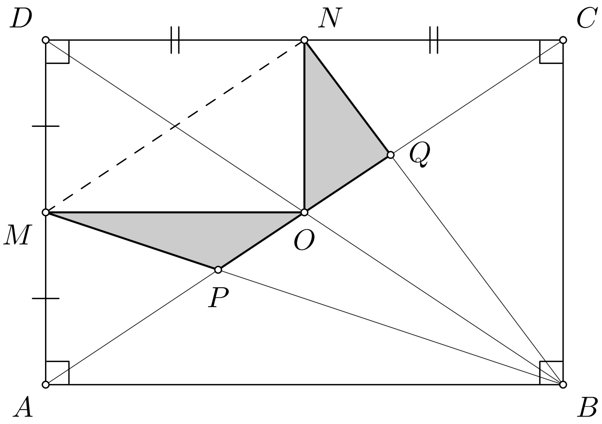
Napomena: Odgovor bez obrazloženja nosi 0 bodova.

Napomena: Službeno rješenje je zapisano kao da je u zadatku zadano da je bojanje završilo u 17 sati (umjesto u 16 sati). Zadatak je svejedno korektno zadan, pa sljedeće rješenje zaslužuje sve bodove: ukupan broj radnih sati je 22, broj mogućih termina je 6, pa zaključujemo da mora biti barem četvero prijatelja u jednom terminu jer bi inače ukupan broj radnih sati iznosio najviše $6 \cdot 3 = 18$.

Zadatak A-2.6.

Neka je $ABCD$ pravokutnik sa središtem O i neka su točke P i Q na dijagonali $\overline{AC}$ takve da je $|AP| = |PQ| = |QC|$. Ako pravac PB siječe stranicu $\overline{AD}$ u točki M, a pravac BQ siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki N, dokaži da su površine trokuta MPO i NQO jednake.

Prvo rješenje.



Budući da je $\sphericalangle APM = \sphericalangle CPB$ i $\sphericalangle PAM = \sphericalangle PCB$, trokuti MAP i BCP su slični. 1 bod

Iz te sličnosti slijedi

$$\frac{|AM|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|PC|} = \frac{1}{2}.$$ 2 boda

Budući da je $|AD| = |BC|$, vrijedi $|AM| : |AD| = 1 : 2$, tj. M je polovište dužine $\overline{AD}$. 2 boda

Analogno (zbog sličnosti trokuta ABQ i CNQ), slijedi da je N polovište dužine $\overline{DC}$. 1 bod

Sada zaključujemo da je $\overline{MN}$ srednjica trokuta ACD, pa je $MN \parallel AC$. 1 bod

Prema tome visina v_1 iz vrha N na stranicu $\overline{OQ}$ je jednaka visini v_2 iz vrha M na stranicu $\overline{OP}$. 1 bod

Točka O je polovište dužine $\overline{AC}$. Budući da je $|AP| = |CQ|$, slijedi $|OP| = |OQ|$. 1 bod

Stoga je

$$P(MPO) = \frac{|OP| \cdot v_1}{2} = \frac{|OQ| \cdot v_2}{2} = P(NQO).$$ 1 bod

Napomena: Kako bi dokazao da je $MN \parallel AC$, učenik ne mora zaključiti da su točke M i N polovišta. Zbog Talesovog teorema o proporcionalnosti dovoljno je koristeći navedene sličnosti zaključiti

$$\frac{|AM|}{|AD|} = \frac{|AM|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|PC|} = \frac{|QC|}{|AQ|} = \frac{|NC|}{|AB|}.$$

Drugo rješenje.

Točka O je polovište dužine $\overline{AC}$. Budući da je $|AP| = |CQ|$, slijedi da je O polovište dužine $\overline{PQ}$. 1 bod

Točka O je polovište dužine $\overline{BD}$, pa je $\overline{AO}$ težišnica trokuta ABD. 1 bod

Budući da je $|OP| = \frac{1}{2}|PQ| = \frac{1}{2}|AP|$, zaključujemo da je $|OP| : |AP| = 1 : 2$. 1 bod

Dakle, točka P dijeli težišnicu $\overline{AO}$ u omjeru $2 : 1$, pa je P težište trokuta ABD. 2 boda

Budući da P leži na dužini $\overline{BM}$, zaključujemo da je $\overline{BM}$ također težišnica, tj. da je M polovište stranice $\overline{AD}$. 1 bod

Analogno zaključujemo da je N polovište stranice $\overline{CD}$. 1 bod

Kao u prvom rješenju, zaključujemo da je $MN \parallel AC$, da su visine u trokutima MPO i NQO jednakih duljina, te dobivamo $P(MPO) = P(NQO)$. 3 boda

Napomena: Pokažimo još jedan način za vidjeti da su točke M i N redom polovišta stranica $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$.

Trokuti APD i CQB su sukladni jer su centralnosimetrična slika jedan drugoga obzirom na točku O (alternativno, sukladnost možemo dokazati po S–K–S teoremu). (1 bod)

Zbog sukladnosti slijedi $\sphericalangle CBN = \sphericalangle ADP$, pa je $BN \parallel DP$, tj. $QN \parallel DP$. (1 bod)

Budući da je Q polovište dužine $\overline{PC}$, a $QN \parallel DP$, slijedi da je $\overline{QN}$ srednjica u trokutu CDP, tj. N je polovište stranice $\overline{DC}$. (3 boda)

Analogno, točka M je polovište stranice $\overline{AD}$. (1 bod)

Zadatak A-2.7.

Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj. Kvadrat $ABCD$ je podijeljen na n^2 pravokutnika pravcima $p_1, \dots, p_{n-1}$ paralelnim s pravcem AB i pravcima $q_1, \dots, q_{n-1}$ paralelnim s pravcem BC. Stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ leže redom na pravcima p_0 i p_n, a stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ redom na pravcima q_0 i q_n. Pravac p_i se nalazi između pravaca p_{i-1} i p_{i+1}, a pravac q_i se nalazi između pravaca q_{i-1} i q_{i+1}, za sve $i = 1, \dots, n-1$. Neka je $A_{i,j}$ pravokutnik omeđen pravcima p_{i-1}, p_i, q_{j-1} i q_j, za $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Ako je poznato da pravokutnici $A_{i,j}$ i $A_{j,i}$ imaju jednake površine za svaki par (i, j) takav da je $1 \leqslant i < j \leqslant n$, dokaži da je $A_{i,i}$ kvadrat za svaki $i = 1, \dots, n$.

Prvo rješenje.

Duljinu stranice početnog kvadrata označimo sa x.

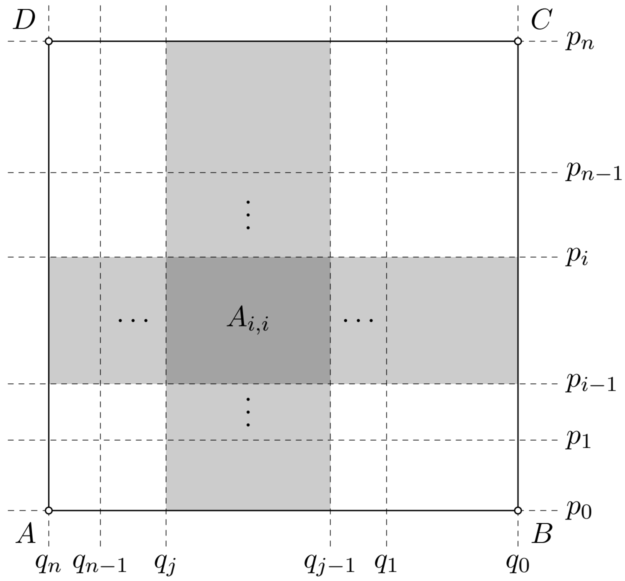
Udaljenost pravaca p_{i-1} i p_i označimo sa a_i, te udaljenost pravaca q_{j-1} i q_j sa b_j. Želimo pokazati da je $a_i = b_i$ za svaki i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Površinu pravokutnika određenog pravcima p_{i-1} i p_i, te stranicama početnog kvadrata (okomitim na te pravce) možemo izračunati na dva načina, kao produkt duljina stranica i kao sumu površina pravokutnika $A_{i,j}$, $j = 1, \dots, n$, tj.

$$xa_i = P(A_{i,1}) + P(A_{i,2}) + \dots + P(A_{i,n}).$$

Analogno promatrajući pravokutnik određen pravcima q_{i-1} i q_i dobivamo

$$xb_i = P(A_{1,i}) + P(A_{2,i}) + \dots + P(A_{n,i}).$$



Prema uvjetu, desne strane u obje relacija su jednake, tj.

$$P(A_{i,1}) + P(A_{i,2}) + \cdots + P(A_{i,n}) = P(A_{1,i}) + P(A_{2,i}) + \cdots + P(A_{n,i}).$$ 1

Iz toga slijedi $xa_i = xb_i$, odnosno $a_i = b_i$. 3 boda

Drugo rješenje.

Neka je a_i širina, a b_j visina pravokutnika $A_{i,j}$ za $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Fiksirajmo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Želimo dokazati $a_i = b_i$.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $a_i b_j = a_j b_i$ za sve $1 \leqslant j \leqslant n$.

Zato možemo izraziti a_j, za $j = 1, \ldots, n$, preko a_i:

$$a_j = \frac{a_i}{b_i} \cdot b_j.$$ 1 bod

Ako je x duljina stranice kvadrata, onda vrijedi $x = a_1 + \cdots + a_n$ i $x = b_1 + \cdots + b_n$.

Sada možemo zaključiti

$$x = a_1 + \cdots + a_n = \frac{a_i}{b_i} \cdot b_1 + \cdots + \frac{a_i}{b_i} \cdot b_n = \frac{a_i}{b_i} \cdot (b_1 + \cdots + b_n) = \frac{a_i}{b_i} \cdot x.$$

Odavde slijedi $a_i = b_i$. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

21. siječnja 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da je $1 < a, b \leqslant 100$ i

$$\frac{1}{\log_a 10} + \frac{1}{\log_b 10}$$

prirodni broj.

Rješenje.

Vrijedi

$$\frac{1}{\log_a 10} + \frac{1}{\log_b 10} = \log a + \log b = \log ab,$$

pa je broj $\dfrac{1}{\log_a 10} + \dfrac{1}{\log_b 10}$ prirodan ako i samo ako je ab potencija broja 10.

Budući da je $1 < a, b \leqslant 10^2$, slijedi da je $ab \in \{10, 10^2, 10^3, 10^4\}$.

Ispišimo parove (a, b) takve da je $ab = 10^n$ redom za $n = 1, 2, 3, 4$.

Ako je $n = 1$, onda imamo dva takva para $(2, 5)$ i $(5, 2)$.

Ako je $n = 2$, onda imamo sedam parova

$$(2, 50), (4, 25), (5, 20), (10, 10), (20, 5), (25, 4), (50, 2).$$

Ako je $n = 3$, onda imamo šest parova

$$(10, 100), (20, 50), (25, 40), (40, 25), (50, 20), (100, 10).$$

Konačno, ako je $n = 4$, onda imamo samo jedan par $(100, 100)$.

Napomena: Ako učenik zapiše sva rješenja (a, b) u kojima je $a \leqslant b$, ali ne spomene da postoje i simetrična rješenja, treba dobiti 5 bodova.

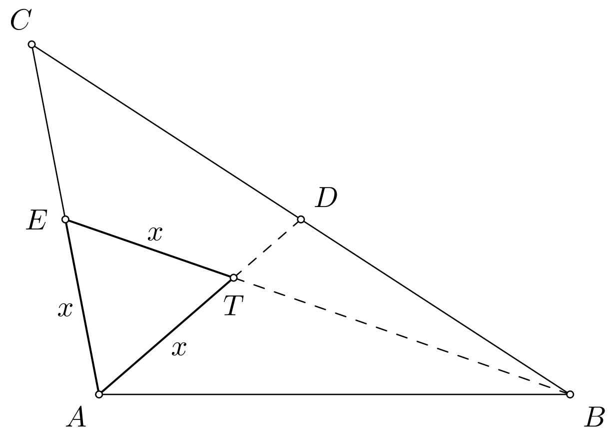
Osim ako se ne radi o situaciji iz prethodne rečenice, učenik koji izostavi neko rješenje (a, b) za koje je $ab = 10^n$ ne ostvaruje bod koji se dodjeljuje za taj n.

Zadatak A-3.2.

Neka je ABC trokut s težištem T u kojem su točke D i E redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Ako je trokut ATE jednakostraničan, odredi kosinus kuta $\sphericalangle DAB$.

Prvo rješenje.

Označimo $x = |AT| = |TE| = |EA|$.



Budući da težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$, slijedi da je $|BT| = 2x$. 1 bod

Poučak o kosinusu na trokut ABE daje $|AB|^2 = (3x)^2 + x^2 - 2 \cdot 3x \cdot x \cos 60^\circ = 7x^2$, iz čega slijedi da je $|AB| = x\sqrt{7}$. 3 boda

Konačno, poučak o kosinusu na trokut ABT daje $\cos \sphericalangle DAB = \dfrac{x^2 + 7x^2 - 4x^2}{2x^2\sqrt{7}}$, tj.

$\cos \sphericalangle DAB = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. 2 boda

Napomena: Učenik ne mora izraziti $|AB|$ kao $x\sqrt{7}$, dovoljno je dobiti da je $|AB|^2 = 7x^2$. Učenici mogu dobiti taj rezultat koristeći poučak o kosinusu na trokut ABT (umjesto ABE) u kojem je $\sphericalangle ATB = 120^\circ$.

Drugo rješenje.

Označimo $x = |AT| = |TE| = |EA|$.

Budući da težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$, slijedi da je $|BT| = 2x$. 1 bod

Neka je $\varphi = \sphericalangle BAT$. Tada je $\sphericalangle ABT = 60^\circ - \varphi$. Prema poučku o sinusima na trokut ABT slijedi

$$\frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{|AT|}{|BT|} = \frac{1}{2}.$$ 2 boda

Koristeći adicijsku formulu dobivamo

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\sin 60^\circ \cdot \cos \varphi - \cos 60^\circ \cdot \sin \varphi}{\sin \varphi}.$$ 1 bod

Dakle, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \dfrac{1}{2}$, tj. $\dfrac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Kako bismo dobili $\cos \varphi$, kvadrirajmo dobiveni izraz i uvrstimo $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$:

$$\frac{4}{3} = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi}.$$

Odavde slijedi $\cos^2 \varphi = \frac{4}{7}$, pa je $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{7}}$ (predznak je $+$ jer je kut φ šiljast).

Zadatak A-3.3.

Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$\sin(x^2 - 5y) - 1 \geqslant \frac{x^4}{2016}.$$

Rješenje.

Budući da je vrijednost sinusa najviše 1 vrijedi $\sin(x^2 - 5y) - 1 \leqslant 0$. 1 bod

Budući da su kvadrati realnih brojeva nenegativni, vrijedi $\frac{x^4}{2016} \geqslant 0$.

Slijedi da obje strane moraju biti jednake točno 0.

Stoga je $x = 0$. 1 bod

Zatim, iz $\sin(-5y) = 1$ slijedi da je $-5y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, a onda i $y = -\frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}$, za $k \in \mathbb{Z}$.

Skup rješenja je stoga $\left\{\left(0, -\frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

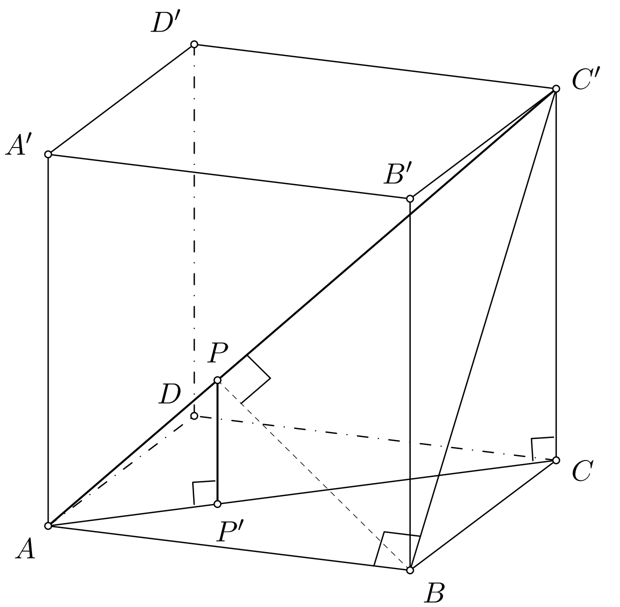
Zadatak A-3.4.

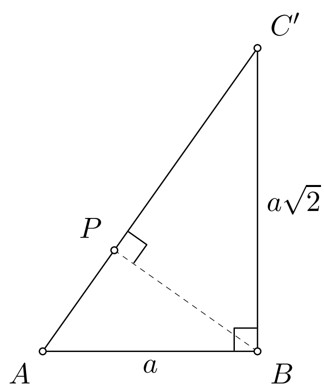
Dana je kocka $ABCDA'B'C'D'$ duljine brida a. Ako je P ortogonalna projekcija točke B na prostornu dijagonalu $\overline{AC'}$, odredi volumen piramide $ABCDP$.

Rješenje.

Neka je P' projekcija točke P na ravninu $ABCD$. Tada je $\overline{PP'}$ visina piramide $ABCDP$.

Trokut $AP'P$ je sličan trokutu ACC' i vrijedi $|P'P| : |CC'| = |AP| : |AC'|$. 1 bod





Trokut ABC' je pravokutan. Duljine kateta tog trokuta su $|AB| = a$ i $|BC'| = a\sqrt{2}$, a duljina hipotenuze je $|AC'| = a\sqrt{3}$. 1 bod

Dužina $\overline{BP}$ je visina na hipotenuzu. Izražavanjem površine trokuta ABC' na dva načina dobivamo

$$\frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot |BP|}{2},$$

pa slijedi da je $|BP| = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. 1 bod

Trokut ABP je pravokutan, pa primjenom Pitagorinog poučka dobivamo

$$|AP|^2 = a^2 - \frac{2}{3}a^2 = \frac{a^2}{3}, \quad \text{odnosno} \quad |AP| = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$ 1 bod

Dakle, vrijedi $|AP| : |AC'| = \frac{1}{3}$. Stoga je $|PP'| = \frac{a}{3}$. 1 bod

Baza piramide $ABCDP$ je kvadrat stranice duljine a, pa je traženi volumen jednak

$$\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{9}.$$

Napomena: Dva boda u sredini se mogu ostvariti i na sljedeći način. Prema Euklidovom teoremu, u pravokutnom trokutu ABC' vrijedi $|AP| \cdot |AC'| = |AB|^2$ (1 bod).

Slijedi da je $|AP| = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. (1 bod)

Zadatak A-3.5.

Kvadrat je podijeljen na konačan broj manjih kvadrata čiji opsezi su prirodni brojevi. Mora li i opseg početnog kvadrata biti prirodni broj?

Rješenje.

Opseg početnog kvadrata mora biti cijeli broj.

Promotrimo jednu stranicu početnog kvadrata. Nju čini konačno mnogo stranica manjih kvadrata – neka su njihovi opsezi $O_1, \ldots, O_k \in \mathbb{N}$. Tada je duljina te stranice jednaka $\frac{O_1}{4} + \cdots + \frac{O_k}{4}$.

Stoga je opseg početnog kvadrata jednak $O_1 + \cdots + O_k$, što je prirodan broj jer je jednak zbroju prirodnih brojeva. 6 bodova

Napomena: Odgovor bez obrazloženja nosi 0 bodova. Učenik na ovom zadatku ne može ostvariti broj bodova različit od 0 ili 6.

Zadatak A-3.6.

Odredi sve vrijednosti realnog parametra a takve da za svaki realni broj x vrijedi

$$\sin^2 x + a\cos x + a^2 \geqslant 1 + \cos x.$$

Prvo rješenje.

Zamjenom $\sin^2 x$ s lijeve strane s $1-\cos^2 x$, dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$1-\cos^2 x + a\cos x + a^2 \geqslant 1+\cos x,$$

odnosno

$$0 \geqslant \cos^2 x + (1-a)\cos x - a^2. \qquad \text{2 boda}$$

Primijetimo da je desna strana kvadratna funkcija u $\cos x$ pa uvedimo supstituciju $t=\cos x$. Pri tome je $t \in [-1,1]$.

Zadnja dobivena nejednakost znači da graf kvadratne funkcije $f(t)=t^2+(1-a)t-a^2$ leži ispod x-osi za $t \in [-1,1]$. 2 boda

Da bi graf na tom intervalu ležao ispod x-osi, nužno je i dovoljno da je $f(-1) \leqslant 0$ i $f(1) \leqslant 0$. 3 boda

Budući da je $f(-1)=1-1+a-a^2=a(1-a)$, iz uvjeta $f(-1) \leqslant 0$ slijedi da je $a \in \langle -\infty, 0] \cup [1, \infty\rangle$. 1 bod

Slično, iz $f(1)=2-a-a^2 \leqslant 0$ dobivamo da je $a \in \langle -\infty, -2] \cup [1, \infty\rangle$.

Presjekom dobivenih skupova zaključujemo da je rješenje $a \in \langle -\infty, -2] \cup [1, \infty\rangle$.

Drugo rješenje.

Uvrštavanjem $x=0$ dobivamo da mora vrijediti $a+a^2 \geqslant 2$, odnosno $a^2+a-2 \geqslant 0$, što je ekvivalentno $(a+2)(a-1) \geqslant 0$. Iz toga slijedi da je $a \in \langle -\infty, -2] \cup [1, \infty\rangle$.

Dokažimo sad da za takve a nejednakost zbilja vrijedi za sve realne x.

Nejednakost je ekvivalentna sljedećima:

$$\begin{gathered}
a\cos x - \cos x + a^2 - 1 + \sin^2 x \geqslant 0, \\
(a-1)\cos x + (a-1)(a+1) + \sin^2 x \geqslant 0, \\
(a-1)(a+1+\cos x) + \sin^2 x \geqslant 0.
\end{gathered}$$

Umnožak s lijeve strane je nenegativan za $a \geqslant 1$ jer su oba faktora nenegativna (tj. vrijedi $a-1 \geqslant 0$ te $a+1+\cos x \geqslant 1+1+(-1)=1>0$).

Za $a \leqslant -2$ je prvi faktor $a-1$ očito negativan, a drugi $a+1+\cos x \leqslant -2+1+1=0$, pa su oba faktora negativna ili nula, što znači da im je produkt nenegativan.

U oba slučaja nejednakost vrijedi jer je i $\sin^2 x$ nenegativan.

Rješenje je $a \in \langle -\infty, -2] \cup [1, \infty\rangle$.

Napomena: U oba rješenja primjenjujemo sljedeću bodovnu shemu. 3 boda se dodjeljuje za dokaz da a mora biti traženog oblika na temelju uvrštavanja pogodnih vrijednosti za x ($x=0$, $\cos x = 1$ itd.), od čega 1 bod nosi konačno rješenje. 2 boda nosi zapisivanje nejednakosti u pogodnom obliku koji omogućava dokaz da će za $a \in \langle -\infty, -2] \cup [1, \infty\rangle$ nejednakost vrijediti za sve $x \in \mathbb{R}$. Konačno, 5 bodova nosi ideja kako dokazati da će za $a \in \langle -\infty, -2] \cup [1, \infty\rangle$ nejednakost vrijediti za sve $x \in \mathbb{R}$.

Zadatak A-3.7.

Nađi sve prirodne brojeve n takve da je broj $n^n - 3$ djeljiv s 10.

Rješenje.

Da bi $n^n - 3$ bio djeljiv s 10, zadnja znamenka mu mora biti 0.

Ako je zadnja znamenka broja n parna (n je paran), onda je zadnja znamenka broja $n^n - 3$ neparna, pa sigurno nije nula.

Ako je zadnja znamenka n jednaka 1, onda isto vrijedi i za n^n, pa je zadnja znamenka $n^n - 3$ jednaka 8, a ne 0. 1 bod

Ako je zadnja znamenka n jednaka 5 (broj je djeljiv s 5), onda isto vrijedi i za n^n, pa je zadnja znamenka $n^n - 3$ jednaka 2, a ne 0. 1

Ako je zadnja znamenka n jednaka 9, onda je zadnja znamenka potencije od n jednaka 9 ili 1, pa je zadnja znamenka od $n^n - 3$ jednaka 6 ili 8, a ne 0.

Kao moguća rješenja, preostaju brojevi koji završavaju s 3 ili 7, odnosno brojevi oblika $10k + 3$ i $10k + 7$.

Za $n = 10k+3$, promotrimo koje se zadnje znamenke pojavljuju kod potencija od takvih n. Ostaci koje 3^a daje pri dijeljenju s 10 su redom $3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1 \ldots$. Primijetimo da su ti ostaci periodični, pa slijedi da eksponent n mora biti oblika $4l + 1$. Iz toga dobivamo da je n oblika $20m + 13$. 3 b

Analogno, potencije od $n = 10k + 7$ pri dijeljenju s 10 daju ostatke $7, 9, 3, 1, \ldots$, pa je n oblika $4l + 3$. Iz toga dobivamo rješenja $n = 20m + 7, m \in \mathbb{N}$. 3 boda

Rješenja su brojevi $n = 20m + 7$ i $n = 20m + 13$ za $m \in \mathbb{N}_0$, tj. svi prirodni brojevi koji pri dijeljenju s 20 daju ostatak 7 ili 13.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

21. siječnja 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Dan je niz $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \quad \text{za} \quad n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2.$$

Odredi a_{2016}.

Rješenje.

Izračunamo li prvih nekoliko članova niza možemo naslutiti da je $a_n = (n-2)!$ za sve prirodne brojeve $n \geqslant 2$. 1 bod

Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

Za $n = 2$ i $n = 3$ vrijedi $a_2 = 1 = 0!$ i $a_3 = 1 = 1!$.

Neka je n prirodni broj i pretpostavimo da je $a_k = (k-2)!$ za sve prirodne brojeve $k \leqslant n$. Budući da vrijedi

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{a_{n-1}},$$ 1 bod

zbog pretpostavke indukcije slijedi

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n-2)! + \frac{(n-2)! \cdot (n-2)!}{(n-3)!} \\ &= (n-2)! + (n-2)! \cdot (n-2) \\ &= (n-2)! \cdot (n-1) = (n-1)!. \end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije slijedi da je $a_n = (n-2)!$ za sve $n \geqslant 2$. 1

Dakle, $a_{2016} = 2014!$.

Zadatak A-4.2.

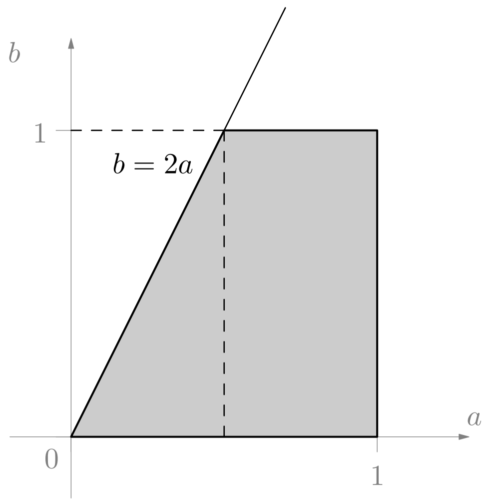
Iz intervala $[0, 1]$ na slučajan način biraju se brojevi a i b. Kolika je vjerojatnost da jednadžba $ax^2 + bx + a = 0$ nema realnih rješenja?

Rješenje.

Jednadžba nema realnih rješenja ako i samo je diskriminanta negativna, tj. $b^2 < 4a^2$.

Budući da je $a, b \geqslant 0$, $b^2 < 4a^2$ je ekvivalentno uvjetu $b < 2a$.

Tražena vjerojatnost geometrijski odgovara omjeru površina lika ispod pravca $b = 2a$ unutar jediničnog kvadrata i samog kvadrata.



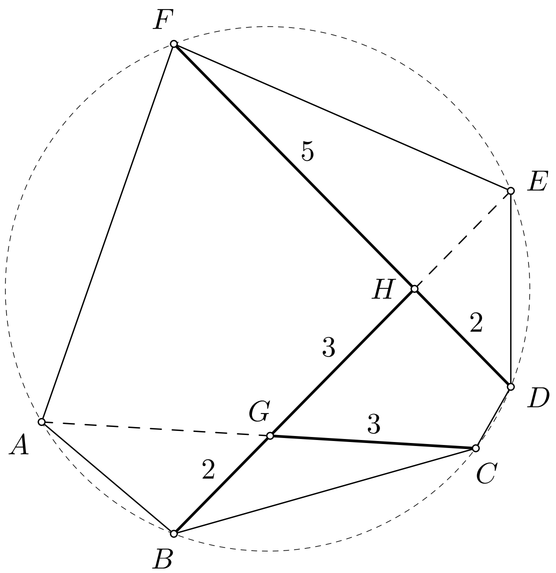
Pravac $b = 2a$ siječe pravac $b = 1$ u točki $(\frac{1}{2}, 1)$, pa je osjenčani lik trapez s osnovicama duljine 1 i $\frac{1}{2}$, te visinom duljine 1.

Vjerojatnost da jednadžba $ax^2 + bx + a = 0$ nema rješenja iznosi $\dfrac{3}{4}$.

Zadatak A-4.3.

Neka je $ABCDEF$ šesterokut upisan u kružnicu. Dužina $\overline{BE}$ siječe dužinu $\overline{AC}$ u točki G, a dužinu $\overline{DF}$ u točki H. Ako je $|CG| = |HG| = 3$, $|BG| = |HD| = 2$ i $|HF| = 5$, odredi $|AC|$.

Rješenje.



Prema poučku o potenciji točke obzirom na kružnicu, vrijedi $|HB| \cdot |HE| = |HD| \cdot |HF|$, odnosno $|HE| = 2$. 2 boda

Dakle, vrijedi $|GE| = 2 + 3 = 5$. 1 bod

Računajući potenciju točke G na zadanu kružnicu slijedi $|GA| \cdot |GC| = |GB| \cdot |GE|$, odnosno $|GA| = \frac{10}{3}$. 2 boda

Sada slijedi $|AC| = |AG| + |GC| = \frac{19}{3}$.

Napomena: Umjesto poučka o potenciji točke obzirom na kružnicu, učenici mogu koristiti sličnost. Budući da su obodni kutovi nad istom tetivom slijedi $\sphericalangle EFH = \sphericalangle EBD$ i $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CAE$. Sada lako dokazujemo da su trokuti EFH i DBH slični, te da su trokuti BCG i AEG slični.

Zadatak A-4.4.

Neka su a, b i c cijeli brojevi. Ako je broj $4a + 5b - 3c$ djeljiv s 19, dokaži da je i broj $6a - 2b + 5c$ djeljiv s 19.

Rješenje.

Uočimo da vrijedi

$$2 \cdot (6a - 2b + 5c) = 3 \cdot (4a + 5b - 3c) - 19 \cdot (b - c).$$

Ako 19 dijeli $4a + 5b - 3c$, onda očito dijeli i desnu stranu gornjeg izraza.

Zbog toga mora dijeliti i lijevu stranu, tj. $2 \cdot (6a - 2b + 5c)$.

Odavde zaključujemo da 19 dijeli $6a - 2b + 5c$.

Zadatak A-4.5.

Je li moguće obojati svako polje ploče dimenzija 8×8 jednom od 16 boja tako da za svake dvije boje postoje dva susjedna polja obojana u te dvije boje?

Dva polja su susjedna ako imaju jednu zajedničku stranicu.

Prvo rješenje.

Odgovor je ne.

Dvije od 16 boja možemo izabrati na $\binom{16}{2} = 120$ načina.

Da bi uvjet zadatka bio zadovoljen, za svaki par boja mora postojati par susjednih polja, odnosno stranica koja povezuje dva susjedna polja.

Prebrojimo koliko ima stranica (bridova) koje dijele dva susjedna polja.

U svakom od 8 redaka ima 7 takvih vertikalnih stranica, te u svakom od 8 stupaca ima 7 takvih horizontalnih stranica, što je ukupno 112.

Prema tome, ne može postojati po jedna stranica za svaki par boja.

Drugo rješenje.

Pretpostavimo da je takvo bojanje moguće.

Jedno polje ima najviše 4 susjeda. Za fiksnu boju b trebamo barem 4 polja u toj boji kako bismo imali 15 parova oblika (b, c) gdje je c neka druga boja.

Dakle, u svakoj boji moramo imati barem 4 polja. No broj polja je 64 i $16 \cdot 4 = 64$, pa mora vrijediti da u svakoj boji imamo točno 4 polja.

Promotrimo boju kojom je obojano polje u nekom uglu, primjerice gornjem lijevom. U toj boji postoje još 3 polja, koja imaju najviše po 4 susjeda svako, a polje u uglu ima 2 susjeda. Prema tome, polja u toj boji imaju najviše 14 susjeda. Ta boja ne može biti susjedna sa svih 15 preostalih boja, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Dakle, odgovor je ne.

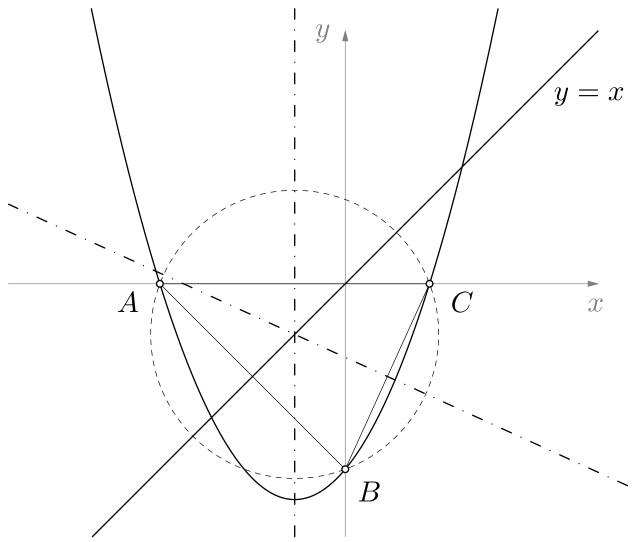
Napomena: Odgovor bez obrazloženja nosi 0 bodova.

Zadatak A-4.6.

Parabola $y = x^2 + ax + b$ siječe koordinatne osi u tri različite točke A, B i C. Središte kružnice opisane trokutu ABC leži na pravcu $y = x$. Dokaži da je $a + b + 1 = 0$.

Prvo rješenje.

Presjeci parabole s koordinatnim osima su $A(x_1, 0)$, $C(x_2, 0)$ i $B(0, b)$.



Simetrala stranice $\overline{AC}$ ima jednadžbu $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. 1 bod

Iz Vièteove formule imamo $x_1 + x_2 = -a$. Prema tome, simetrala stranice $\overline{AC}$ ima jednadžbu $x = -\dfrac{a}{2}$, pa i središte kružnice ima x-koordinatu $-\dfrac{a}{2}$. 1 bod

Budući da leži na pravcu $y = x$, središte ima koordinate $\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a}{2}\right)$.

Simetrala dužine $\overline{AB}$ je pravac kroz točku $\left(\dfrac{x_1}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ okomit na AB. Koeficijent smjera pravca AB je $\dfrac{0-b}{x_1-0}=-\dfrac{b}{x_1}$, pa jednadžba simetrale stranice $\overline{AB}$ glasi

$$y-\frac{b}{2}=\frac{x_1}{b}\left(x-\frac{x_1}{2}\right), \quad \text{tj.} \quad y=\frac{b}{2}-\frac{x_1^2}{2b}+\frac{x_1}{b}x.$$ 2 boda

Središte leži na tom pravcu, pa uvrštavanjem njegovih koordinata imamo

$$-\frac{a}{2}=\frac{b}{2}-\frac{x_1^2}{2b}-\frac{x_1 a}{2b},$$

odnosno

$$-ab=b^2-x_1^2-x_1 a.$$ 1 bod

S druge strane, x_1 je rješenje početne kvadratne jednadžbe pa vrijedi $x_1^2+x_1a+b=0$. 1 bod

Iz zadnje dvije jednakosti slijedi

$$-ab=b^2+b, \quad \text{tj.} \quad b(a+b+1)=0.$$ 2 boda

Uočimo da mora vrijediti $b\neq 0$ jer bi se u suprotnom točka B podudarala s A ili C.

Prema tome, mora vrijediti $a+b+1=0$. 1 bod

Drugo rješenje.

Presjeci parabole s koordinatnim osima su $A(x_1,0)$, $C(x_2,0)$ i $B(0,b)$.

Simetrala stranice $\overline{AB}$ je pravac kroz točku $\left(\dfrac{x_1}{2},\dfrac{b}{2}\right)$ okomit na AB. Koeficijent smjera pravca AB je $\dfrac{0-b}{x_1-0}=-\dfrac{b}{x_1}$, pa jednadžba simetrale dužine $\overline{AB}$ glasi

$$y-\frac{b}{2}=\frac{x_1}{b}\left(x-\frac{x_1}{2}\right), \quad \text{tj.} \quad y=\frac{b}{2}+\frac{x_1^2}{2b}+\frac{x_1}{b}x.$$ 2 boda

Analogno, jednadžba simetrale dužine $\overline{BC}$ glasi

$$y=\frac{b}{2}+\frac{x_2^2}{2b}+\frac{x_2}{b}x.$$ 1 bod

Izjednačavanjem po x dobivamo

$$\frac{b}{x_1}\left(y-\frac{b}{2}-\frac{x_1^2}{2b}\right)=\frac{b}{x_2}\left(y-\frac{b}{2}-\frac{x_2^2}{2b}\right).$$ 1 bod

Sređivanjem dobivamo

$$\frac{2by(x_2-x_1)-b^2(x_2-x_1)}{2x_1x_2}=\frac{x_1-x_2}{2}.$$

Uočimo da je $x_1\neq x_2$ i $b\neq 0$ jer u suprotnom ne bismo imali tri različita sjecišta.

Dijeljenjem sa $\frac{x_2-x_1}{2}$ dobivamo

$$2b\left(y-\frac{b}{2}\right)\cdot\frac{1}{x_1x_2}=-1.$$

Vièteova formula daje $x_1x_2=b$, pa imamo $2y-b=-1$.

Simetrala stranice $\overline{AC}$ ima jednadžbu $x=\frac{x_1+x_2}{2}$.

Iz Vièteove formule imamo $x_1+x_2=-a$. Prema tome, simetrala stranice $\overline{AC}$ ima jednadžbu $x=-\frac{a}{2}$, pa i središte kružnice ima x-koordinatu $-\frac{a}{2}$.

Budući da leži na pravcu $y=x$, središte ima koordinate $\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$.

Slijedi

$$2\cdot\frac{-a}{2}-b=-1, \quad \text{tj.} \quad a+b+1=0.$$ 1 bod

Zadatak A-4.7.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (x,y) za koje vrijedi $x^2-y!=2016$.

Prvo rješenje.

Broj 2016 je djeljiv brojem 32 i nije djeljiv brojem 64.

Uočimo da ne može vrijediti $y=1$. Dakle, mora vrijediti $y\geqslant 2$, pa je $y!$ paran. Zato x mora biti paran broj. 1 bod

Budući da su onda i x^2 i 2016 djeljivi s 4, i $y!$ mora biti djeljivo s 4, pa je $y\geqslant 4$.

Sada možemo zaključiti da je $y!$ djeljivo sa 8, pa x^2 mora biti djeljivo s 8. To znači da x mora biti djeljiv s 4, odnosno da je x^2 djeljivo sa 16. Dakle, $y!$ je djeljivo sa 16, pa je $y\geqslant 6$. 1 bod

Ako je $y\geqslant 8$, onda je $y!$ djeljivo sa 128, a posebno i s 32 pa x^2 mora biti djeljivo s 32.

To znači da x mora biti djeljiv barem sa 8, odnosno da je x^2 djeljivo i sa 64.

Iz toga bi slijedilo da je 2016 djeljivo sa 64, što nije istina. Zato je $y\leqslant 7$. 2 bo

Provjerom vidimo da $2016+6!$ nije potpun kvadrat, a $2016+7!=7056=84^2$, pa je jedino rješenje $(x,y)=(84,7)$. 1 bod

Drugo rješenje.

Ako je $y=7$, onda je $x^2=2016+7!=7056=84^2$, pa je jedno rješenje $(x,y)=(84,7)$. 1 bod

Uvrstimo li redom $y=1$, $y=2$, ..., $y=6$ dobivamo da bi x^2 morao biti jednak

$$2017, 2018, 2022, 2040, 2136, 2736.$$ 1 bod

Provjerimo kvadrate prirodnih brojeva koji su najbliži navedenim brojevima. To su

$$44^2=1936,\ 45^2=2025,\ 46^2=2116,\ 47^2=2209,\ \text{ te }\ 52^2=2704,\ 53^2=2809.$$

Na ovaj način smo provjerili da $2016+y!$ nije kvadrat prirodnog broja za $y\leqslant 6$.

Kao u prvom rješenju dokazujemo da $y\geqslant 8$ ne daje rješenje. 6 bodova