ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

21. siječnja 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Skratite razlomak:

$$\frac{2016^{3n+2}-2016^5}{2016^{2n+3}+2016^{n+4}+2016^5}.$$

Rješenje.

$$\frac{2016^{3n+2}-2016^5}{2016^{2n+3}+2016^{n+4}+2016^5}=\frac{2016^2\cdot(2016^{3n}-2016^3)}{2016^3\cdot(2016^{2n}+2016^{n+1}+2016^2)}$$ 2 boda

$$=\frac{(2016^n-2016)\cdot(2016^{2n}+2016^n\cdot 2016+2016^2)}{2016\cdot(2016^{2n}+2016^n\cdot 2016+2016^2)}$$ 2 boda

$$=\frac{2016^n-2016}{2016}\qquad \text{ili}\qquad 2016^{n-1}-1.$$ 2 boda

Zadatak B-1.2.

Na pitanje koliko minuta dnevno provede na društvenim mrežama, Iva je odgovorila: "Deveterokratnik tog broja je između 1100 i 1200, a trinaesterokratnik između 1500 i 1600." Koliko minuta dnevno Iva provede na društvenim mrežama?

Rješenje.

Neka je x traženi broj.
Tada je $9x \in \langle 1100, 1200\rangle$ i $13x \in \langle 1500, 1600\rangle$. 2 boda
Slijedi $x \in \{123, 124, 125, \ldots, 133\}$ i $x \in \{116, 117, \ldots, 123\}$. 2 boda
Traženi broj je 123. 2 boda

Zadatak B-1.3.

Nad stranicama trokuta $\triangle ABC$ konstruirani su polukrugovi čije su površine jednake 9π, 16π i 25π. Kolika je površina trokuta $\triangle ABC$?

Rješenje.

Vrijedi sljedeće:

$$P_1 = 9\pi, \quad \frac{r_1^2\pi}{2} = 9\pi, \quad r_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad a = 6\sqrt{2} \qquad \text{1 bod}$$

$$P_2 = 16\pi, \quad \frac{r_2^2\pi}{2} = 16\pi, \quad r_2 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}, \quad b = 8\sqrt{2} \qquad \text{1 bod}$$

$$P_3 = 25\pi, \quad \frac{r_3^2\pi}{2} = 25\pi, \quad r_3 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, \quad c = 10\sqrt{2}. \qquad \text{1 bod}$$

Iz Heronove formule slijedi

$$s = 12\sqrt{2}, \quad P = \sqrt{12\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = \sqrt{2304} = 48. \qquad \text{3 boda}$$

Napomena: Uočimo li da je trokut pravokutan ($a^2 + b^2 = 72 + 128 = 200 = (10\sqrt{2})^2 = c^2$), površinu možemo računati po formuli $P = \frac{ab}{2} = 48$.

Zadatak B-1.4.

Pješak koji prelazi 1km za 12 minuta, prijeđe put od A do B za isto vrijeme za koje biciklist prijeđe 10km duži put, kada za $4\frac{1}{2}$ minuta prelazi 1km. Odredite udaljenost od A do B.

Rješenje.

Udaljenost od A do B označimo sa x. Brzina kojom hoda pješak je

$$v_P = \frac{1}{\frac{12}{60}} = 5\,\mathrm{km/h}, \qquad \text{1 bod}$$

a brzina biciklista je

$$v_B = \frac{1}{\frac{4.5}{60}} = \frac{40}{3}\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{1 bod}$$

Kako su dana vremena pješaka i biciklista jednaka, te zbog činjenice da je brzina omjer puta i vremena, slijedi

$$\frac{x}{5} = \frac{x+10}{\frac{40}{3}}, \qquad \text{2 boda}$$

pa je

$$\begin{aligned} \frac{40x}{3} &= 5(x+10) \\ 8x &= 3x + 30 \\ x &= 6\,\mathrm{km}. \end{aligned} \qquad \text{2 boda}$$

Zadatak B-1.5.

Za realne brojeve a, b, c, koji nisu jednaki nuli, vrijedi $a+b+c=0$. Koliko je

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}?$$

Rješenje.

Ako je $a+b+c=0$, onda je $c=-(a+b)$. 1 bod

Dani izraz svedemo na zajednički nazivnik i uvrstimo $c=-(a+b)$. Dobivamo

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3-(a+b)^3}{-ab(a+b)} \quad \text{1 bod}$$

$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)^3}{-ab(a+b)} \quad \text{1 bod}$$

$$=\frac{a^2-ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{-ab} \quad \text{2 boda}$$

$$=\frac{-3ab}{-ab}=3. \quad \text{1 bod}$$

Zadatak B-1.6.

Student je u toku petogodišnjeg studija položio 31 ispit. Svake godine je dao više ispita nego prethodne, a na petoj godini je dao tri puta više ispita nego na prvoj. Koliko je ispita student položio na četvrtoj godini?

Rješenje.

Označimo broj ispita koje je student položio na i-toj godini s x_i, $i \in \{1,2,3,4,5\}$.
Tada je $x_5=3x_1$, $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$ i $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=31$. 1 bod

Ako je $x_1=1$, onda je $x_5=3$. To je nemoguće jer između 1 i 3 ne postoje 3 različita prirodna broja. 2 boda

Ako je $x_1=2$, onda je $x_5=6$, a broj ispita na preostalim godinama mora biti $3,4$ i 5. Međutim zbroj $2+3+4+5+6$ nije 31. 2 boda

Ako je $x_1=3$, onda je $x_5=9$, pa su x_2, x_3, x_4 neki od brojeva $4,5,6,7,8$. Kako je $3+9=12$, mora biti $x_2+x_3+x_4=19$, što se dobije za $4+7+8$ ili $5+6+8$. 2 boda

Za slučaj kad je $x_1 \geqslant 4$ nema rješenja, jer je $x_5=3 \cdot x_1 \geqslant 12$, a zbroj $x_2+x_3+x_4=31-x_1-x_5 \leqslant 15$. S druge strane, najmanje vrijednosti koje mogu poprimiti brojevi x_2, x_3, x_4 su $5,6,7,8,9,10,11,\ldots$, a njihov zbroj je najmanje 18, što je veće od 15. 2 boda

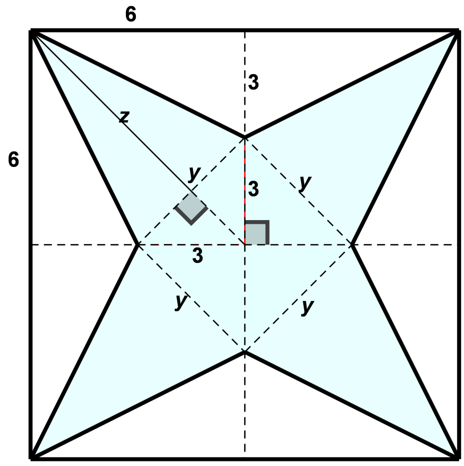
Student je na četvrtoj godini položio 8 ispita. 1 bod

Zadatak B-1.7.

Duljina stranice kvadrata iznosti 12 cm. Iz kvadrata se izrežu 4 jednakokračna trokuta kojima su osnovice stranice kvadrata, a duljine visina 3 cm. Preostali dio kvadrata je mreža četverostrane piramide. Izračunajte obujam i oplošje te piramide.

Rješenje.

Skica: 1 bod



Označimo s B površinu baze piramide, a s h visinu piramide. Sa skice se vidi da je

$$B = y^2 = 2 \cdot (6-3)^2 = 18,$$ 1 bod

tj.

$$y = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}.$$ 1 bod

Sada je

$$z = 6\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \quad \text{i} \quad h^2 = z^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$ 2 boda

odnosno

$$h^2 = \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 36 \implies h = 6\,\mathrm{cm}.$$ 1 bod

Volumen piramide iznosi

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot y^2 \cdot h$$ 1 bod

$$= \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36\,\mathrm{cm}^3,$$ 1 bod

a oplošje

$$O = 12^2 - 4 \cdot \frac{12 \cdot 3}{2} = 144 - 72$$
$$= 72\,\mathrm{cm}^2.$$ 2 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

21. siječnja 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Odredite zbroj rješenja jednadžbe $\left|\dfrac{2x^2+x-8}{x^2-2x-8}\right| = 2.$

Rješenje.

Imamo dvije mogućnosti:

$$\frac{2x^2+x-8}{x^2-2x-8} = 2 \quad \text{ili} \quad \frac{2x^2+x-8}{x^2-2x-8} = -2.$$

Primijetimo i da nazivnik mora biti različit od 0, stoga iz $x^2-2x-8 \neq 0$ zaključujemo $x \neq 4$ i $x \neq -2$. 2 boda

Prvi slučaj: $\frac{2x^2+x-8}{x^2-2x-8} = 2.$
Množenjem ove jednakosti s nazivnikom dolazimo do

$$2x^2+x-8 = 2x^2-4x-16.$$

Sređivanjem dobivamo $5x = -8$, odakle čitamo jedno rješenje: $x_1 = \frac{-8}{5}$. 1 bod

Drugi slučaj: $\frac{2x^2+x-8}{x^2-2x-8} = -2.$
Kao u prvom slučaju, dolazimo do $2x^2+x-8 = -2x^2+4x+16$, odakle slijedi

$$4x^2-3x-24 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_2 = \frac{3+\sqrt{393}}{8}$ i $x_3 = \frac{3-\sqrt{393}}{8}$. 2 boda

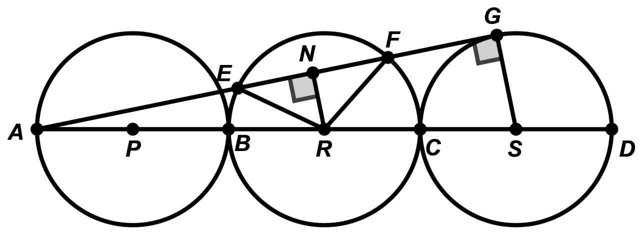
Konačno rješenje je, dakle, $x_1+x_2+x_3 = \frac{-8}{5} + \frac{6}{8} = \frac{-17}{20}$. 1 bod

Napomena: Budući da se traži samo zbroj rješenja, u drugom slučaju možemo koristiti Vieteove formule kako bismo dobili $x_2+x_3 = \frac{6}{8}$ direktno, bez rješavanja kvadratne jednadžbe. Ipak, tada treba provjeriti da ni 4 ni -2 nisu rješenja promatrane jednadžbe.

Zadatak B-2.2.

Dužina $\overline{AD}$ podijeljena je točkama B i C na tri jednaka dijela. Dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ promjeri su kružnica k_1, k_2, k_3 sa središtima redom u točkama $P \in \overline{AB}$, $R \in \overline{BC}$, $S \in \overline{CD}$. Iz točke A povučena je tangenta na kružnicu k_3 s diralištem u točki G. Tangenta AG odsijeca na kružnici k_2 tetivu $\overline{EF}$. Odredite duljinu tetive $\overline{EF}$ ako duljina dužine $\overline{AD}$ iznosi 90cm.

Rješenje.



Kako je AG tangenta u točki G na kružnicu sa središtem u S, polumjer SG je okomit na pravac AG. 1 bod

Označimo s N točku u kojoj okomica iz središta R siječe tangentu AG. Trokuti ASG i ARN su slični prema poučku KK o sličnim trokutima pa vrijedi

$$\frac{|\overline{RN}|}{|\overline{SG}|}=\frac{|\overline{AR}|}{|\overline{AS}|},$$ 2 boda

dakle

$$\frac{|\overline{RN}|}{15}=\frac{45}{75} \quad \Rightarrow \quad |\overline{RN}|=9 \text{ cm}.$$ 1 bod

Tada je iz pravokutnog trokuta ERN

$$\left(\frac{|\overline{EF}|}{2}\right)^2=15^2-9^2=144,$$

$$|\overline{EF}|=24 \text{ cm}.$$ 2 boda

Zadatak B-2.3.

Dino je naslijedio voćnjak s 50 stabala mandarina. Međutim, Dino bi svojoj djeci želio u nasljedstvo ostaviti i određeni broj stabala koja je on zasadio. Ako je rodna godina, svako će stablo dati 800 mandarina. Za svako dodatno zasađeno stablo u tom voćnjaku urod će se po stablu umanjiti za 10 mandarina. Koliko novih stabala Dino treba zasaditi u voćnjaku kako bi ukupan urod mandarina bio maksimalan? Koliko iznosi maksimalni urod?

Rješenje.

Neka je x dodatni broj stabala koja će Dino zasaditi u voćnjaku. Želimo maksimizirati ukupan urod U mandarina.

$$U = (\text{broj stabala})(\text{broj mandarina po stablu}) = (50 + x)(800 - 10x)$$

$$U = U(x) = 40000 + 300x - 10x^2.$$ 3 boda

Kako je ukupan urod mandarina kvadratna funkcija po varijabli x, njezin će maksimum biti za

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{300}{20} = 15 \text{ stabala.}$$ 2 boda

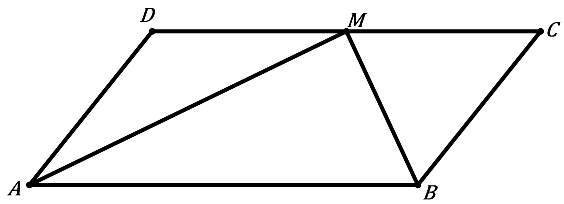
Makismalan urod iznosi $U(x) = 40000 + 300 \cdot 15 - 10 \cdot 15^2 = 42250$ mandarina. 1 bod

Zadatak B-2.4.

Neka je $ABCD$ paralelogram, a M polovište stranice $\overline{DC}$. Ako točka M leži na simetrali kuta DAB, odredite mjeru kuta AMB.

Rješenje.

Označimo $\sphericalangle BAD = \alpha$.



Budući da je $DC \parallel AB$ i

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle AMD = \sphericalangle DAM = \frac{\alpha}{2},$$

trokut DAM je jednakokračan:

$$|DM| = |DA| \quad \text{i} \quad \sphericalangle DMA = \frac{\alpha}{2}.$$ 2 boda

Budući da je i trokut MCB jednakokračan (jer $|MC| = |MD| = |DA| = |BC|$), slijedi

$$\sphericalangle BCM = \sphericalangle BCD = \sphericalangle DAB = \alpha$$

i

$$\sphericalangle CMB = \sphericalangle CBM = \frac{180^\circ - \sphericalangle BCM}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$ 2 boda

Sada je jednostavno izračunati da je $\sphericalangle AMB = 180^\circ - \sphericalangle AMD - \sphericalangle CMB = 90^\circ$. 2 boda

Zadatak B-2.5.

Odredite sve uređene trojke prirodnih brojeva (a, b, c) za koje vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} ab + bc &= 44, \\ ac + bc &= 23. \end{aligned}$$

Rješenje.

Iz druge jednakosti slijedi $(a+b)c = 23$. Tada je

$$c = 1, a + b = 23, \quad \text{ili} \quad c = 23, a + b = 1. \qquad \text{2 boda}$$

U slučaju $c = 1, a = 23 - b$ nakon uvrštavanja dobivamo

$$(23 - b)b + b = 44 \quad \Rightarrow \quad b^2 - 24b - 44 = 0.$$

Odavde je $b = 2$ ili $b = 22$, a tada je $a = 21$ ili $a = 1$. 2 boda

Drugi slučaj ($c = 23$, $a + b = 1$) nije moguć, jer su a i b prirodni brojevi pa ne mogu u zbroju davati 1. 1 bod

Konačna rješenja su $(a, b, c) \in \{(1, 22, 1), (21, 2, 1)\}$. 1 bod

Napomena: Drugi slučaj se također može odbaciti tako da u prvu jednakost uvrstimo $b = 1 - a$ i dobijemo kvadratnu jednadžbu koja ima samo negativna rješenja.

Zadatak B-2.6.

Ako je

$$f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n, \quad \text{gdje je } n \in \mathbb{N}, i^2 = -1,$$

koliko je $f(n + 2016) - f(n - 2016)$?

Rješenje.

Računamo

$$\begin{aligned} f(n+2016) &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n+2016} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n+2016} \\ &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2016} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2016} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n. \end{aligned} \qquad \text{2 boda}$$

Kako je

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2016} = \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{1008} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{1008} = i^{1008} = 1, \text{i slično } \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2016} = 1,$$

slijedi

$$f(n+2016) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n = f(n). \qquad \text{3 boda}$$

Analogno računamo

$$\begin{aligned}
f(n+2016) &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2016} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2016} \\
&= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-2016} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{-2016} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n} \\
&= \left(\left(\frac{2i}{2}\right)^{1008}\right)^{-1} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n} + \left(\left(\frac{-2i}{2}\right)^{1008}\right)^{-1} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n} \\
&= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n} = f(n).
\end{aligned}$$

4 boda

Zaključujemo $f(n+2016) - f(n-2016) = f(n) - f(n) = 0$. 1 bod

Zadatak B-2.7.

Rješenja jednadžbe

$$\frac{(a-x)^3 + (b-x)^3}{(a-x)^2 + (b-x)^2} = a - b, \quad \text{gdje su } a, b \in \mathbb{R}$$

su uzastopni višekratnici broja 6 kojima je zbroj kvadrata 4068. Odredite $a \cdot b$.

Rješenje.

Napišimo u obliku umnoška brojnik i nazivnik na lijevoj strani jednadžbe:

$$\frac{(a-x+b-x)[(a-x)^2 - (a-x)(b-x) + (b-x)^2]}{(a-x-b+x)(a-x+b-x)} = a - b,$$

to jest

$$\frac{(a+b-2x)[(a-x)^2 - (a-x)(b-x) + (b-x)^2]}{(a-b)(a+b-2x)} = a - b.$$

2 boda

Ako je $a \neq b$ i $x \neq \frac{a+b}{2}$, nakon skraćivanja slijedi

$$(a-x)^2 - (a-x)(b-x) + (b-x)^2 = (a-b)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - (a+b)x + ab = 0.$$

2 boda

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su $x_1 = a$, $x_2 = b$. 2 boda

Iz uvjeta zadatka da su a i b uzastopni višekratnici broja 6 kojima je zbroj kvadrata jednak 4068 slijedi

$$a^2 + (a+6)^2 = 4068.$$

2 boda

Odavde je $a = 42$, $b = 48$ pa je $ab = 2016$. 2 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

21. siječnja 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Ako je $\dfrac{5\cos\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{2}}{3\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{15}{13}$, $x\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$, koliko je $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$?

Rješenje.

Podijelimo li brojnik i nazivnik s $\cos\frac{x}{2}$ dobivamo:

$$\frac{5-3\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}=\frac{15}{13}$$

odakle slijedi

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{5}{12}.$$ 3 boda

Tada je $\cos\frac{x}{2}=\frac{12}{13}$ pa je

$$\operatorname{tg}\frac{x}{4}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{13}}{\frac{25}{13}}}=\frac{1}{5}.$$ 3 boda

Zadatak B-3.2.

Odredite sve cijele brojeve p za koje jednadžba $\sin(px)=\frac{1}{p}$ ima 2016 rješenja na intervalu $\langle 0,2\pi]$.

Rješenje.

Broj $p\neq\pm1$ jer $\sin x=1$ ima samo 1 rješenje na zadanom intervalu. Kako je $p\in\mathbb{Z}$, $p\neq 0,\pm1$, broj $\left|\frac{1}{p}\right|<1$, pa jednadžba $\sin x=\frac{1}{p}$ ima točno 2 rješenja na temeljnom periodu funkcije sinus, odnosno na intervalu $\langle 0,2\pi]$. 2 boda

Tada jednadžba $\sin(px)=\frac{1}{p}$ ima točno 2 rješenja na svom temeljnom periodu, a to je $\frac{2\pi}{|p|}$. 1 bod

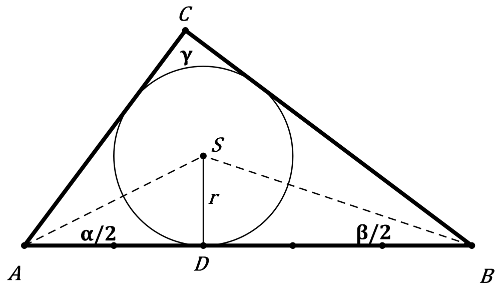
Kako je $2\pi=|p|\cdot\frac{2\pi}{|p|}$ slijedi da jednadžba $\sin(px)=\frac{1}{p}$ ima točno $2|p|$ rješenja na intervalu $\langle 0,2\pi]$. 1 bod

Tada iz $2|p|=2016$ slijedi $p\in\{-1008,1008\}$. 2 boda

Zadatak B-3.3.

Trokutu ABC upisana je kružnica. Diralište sa stranicom $\overline{AB}$ dijeli tu stranicu na dijelove kojima su duljine u omjeru $2:3$. Polumjer kružnice jednak je petini duljine stranice $\overline{AB}$. Odredite mjeru kuta nasuprot stranice $\overline{AB}$?

Rješenje.



$|AD| = 2k$, $|DB| = 3k \Rightarrow c = |AB| = 5k \Rightarrow r = k$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$ 1 bod

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3}$$ 1 bod

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{3}$$ 1 bod

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}} = \frac{3}{4}$$ 1 bod

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{ctg}\beta \Rightarrow \alpha+\beta = 90^\circ,\ \gamma = 90^\circ.$$ 2 boda

Zadatak B-3.4.

Za duljine kateta pravokutnog trokuta a i b vrijedi jednakost

$$\log(a+b) = \frac{1}{2}\cdot\log b + \frac{1}{2}\cdot\log(a+3b).$$

Izračunajte mjeru kuta nasuprot katete duljine a.

Rješenje.

Koristeći pravila za logaritmiranje dobivamo

$$\log(a+b) = \frac{1}{2} \cdot \log[b \cdot (a+3b)]$$

$$\log(a+b)^2 = \log[b \cdot (a+3b)] \qquad \text{1 bod}$$

$$(a+b)^2 = b \cdot (a+3b). \qquad \text{1 bod}$$

Odatle je $a^2 + ab - 2b^2 = 0$. 1 bod

Nakon dijeljenja s b^2 dobivamo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 2 = 0 \text{ ili } \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha - 2 = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 \text{ ili } \operatorname{tg} \alpha = -2. \qquad \text{2 boda}$$

Rješenje u pravokutnom trokutu može biti samo $\operatorname{tg} \alpha = 1$, odnosno $\alpha = 45^\circ$. 1 bod

Zadatak B-3.5.

Koje sve vrijednosti mogu poprimiti znamenke a i b tako da zbroj brojeva $\overline{29a8}$ i $\overline{342b}$ bude djeljiv s 18?

Rješenje.

Zbroj danih brojeva zapisujemo kao

$$S = 2908 + 10a + 3420 + b = 6318 + 10 + 10a + b = 351 \cdot 18 + 10a + b + 10. \qquad \text{2 boda}$$

Tada je S djeljiv s 18 ako je broj $N = 10a + b + 10$ djeljiv s 18.
Kako je $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, najmanja vrijednost koju broj N može imati je 10, a najveća 109. 1 bod

Uz to je i višekratnik broja 18, pa N mora biti unutar skupa $\{18, 36, 54, 72, 90, 108\}$. 1 bod

Tada je $10a + b \in \{8, 26, 44, 62, 80, 98\}$, odnosno

$$(a, b) \in \{(0, 8), (2, 6), (4, 4), (6, 2), (8, 0), (9, 8)\}. \qquad \text{2 boda}$$

Zadatak B-3.6.

Odredite ukupnu duljinu svih intervala realnih brojeva koji su rješenje sustava nejednadžbi

$$12^{\sin(2x)} \cdot 14^{\frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}} \geqslant \sqrt[4]{2016}, \quad |x| \leqslant 2016\pi.$$

Rješenje.

Rješenje nejednadžbe $|x| \leqslant 2016\pi$ je interval $[-2016\pi, 2016\pi]$. 1 bod

Pojednostavimo preostalu nejednadžbu.

$$12^{2\sin x\cos x} \cdot 14^{\frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x}} \geqslant 2016^{\frac{1}{4}}$$

$$144^{\sin x \cos x} \cdot 14^{\sin x \cos x} \geqslant 2016^{\frac{1}{4}} \qquad \text{2 boda}$$

$$(144 \cdot 14)^{\sin x \cos x} \geqslant 2016^{\frac{1}{4}} \qquad \text{1 bod}$$

$$2016^{\sin x \cos x} \geqslant 2016^{\frac{1}{4}}$$

$$\sin x \cos x \geqslant \frac{1}{4} \qquad \text{1 bod}$$

$$2\sin x \cos x \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\sin(2x) \geqslant \frac{1}{2} \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{12} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Dakle, rješenje prve nejednadžbe je unija svih intervala

$$\left[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right],\ k \in \mathbb{Z} \qquad (*) \qquad \text{2 boda}$$

Svi dobiveni intervali su duljine

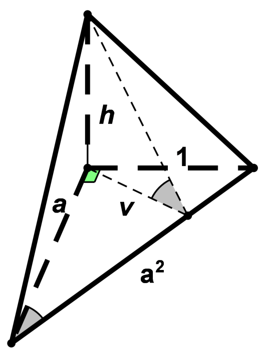
$$\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}.$$

Unutar skupa $[-2016\pi, 2016\pi]$ nalazi se 4032 intervala $(*)$, pa tražena ukupna duljina iznosi $4032\frac{\pi}{3} = 1344\pi$. 2 boda

Zadatak B-3.7.

Osnovka piramide je pravokutni trokut sa stranicama duljina 1, a, a^2, $a > 1$. Vrh piramide se ortogonalno projicira u vrh pravog kuta osnovke. Šiljasti kut nasuprot stranice duljine 1 jednak je kutu pod kojim je jedna pobočka nagnuta prema osnovki. Izračunajte obujam piramide.

Rješenje.



1 bod

Primjenom Pitagorinog poučka dobivamo

$$\begin{aligned} &a^4 = a^2 + 1, \\ &a^4 - a^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

1 bod

Pozitivno rješenje ove bikvadratne jednadžbe je

$$a^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ odnosno } a = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

2 boda

Ako je α kut nasuprot katete duljine 1 tada je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{a} \text{ i } \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{v} \text{ pa je } h = \frac{v}{a}.$$

2 boda

U pravokutnom trokutu je duljina visine na hipotenuzu

$$v = \frac{1 \cdot a}{a^2} = \frac{1}{a}.$$

1 bod

Tada je

$$h = \frac{v}{a} = \frac{1}{a^2},$$

1 bod

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{a} \\ V &= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}} \\ V &= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}. \end{aligned}$$

2 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

21. siječnja 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Za koje će prirodne brojeve n izraz $\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^n$ biti realan broj? Koliko je takvih brojeva n koji su manji od 2016?

Rješenje.

$$\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^n=\left(\frac{3+i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}\right)^n=(1+i)^n.$$ 2 boda

Promotrimo dva slučaja.
Prvi slučaj za $n=2k$:
$(1+i)^n=(1+i)^{2k}=(2i)^k$.
Ovo će biti realan broj samo ako je k paran, tj. $n=4l$. 2 boda
Drugi slučaj za $n=2k+1$:
$(1+i)^n=(1+i)^{2k+1}=(2i)^k\cdot(1+i)$.
Ovaj izraz nikada nije realan broj. 1 bod
Prirodnih brojeva manjih od 2016 sa svojstvom da su djeljivi s 4 ima 503. 1 bod

Zadatak B-4.2.

U razvoju binoma $\left(\sqrt{6^x}+\frac{1}{\sqrt{6^{x+1}}}\right)^n$ omjer koeficijenata trećeg i drugog člana je $7:2$. Odredite x tako da je četvrti član u razvoju binoma jednak 2016.

Rješenje.

Ako je omjer koeficijenata trećeg i drugog člana $7:2$, onda je

$$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} = \frac{7}{2} \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{n(n-1)}{2n} = \frac{7}{2}$$

$$n = 8. \qquad \text{1 bod}$$

Četvrti član u razvoju binoma je

$$\binom{8}{3}(\sqrt{6^x})^5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6^{x+1}}}\right)^3 = 2016 \qquad \text{1 bod}$$

$$56 \cdot 6^{\frac{5x}{2}} \cdot 6^{\frac{-3x-3}{2}} = 2016$$

$$6^{\frac{5x}{2}} \cdot 6^{\frac{-3x-3}{2}} = 36 \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{3x+3}{2} = 2 \qquad \text{1 bod}$$

$$5x - 3x - 3 = 4$$

$$x = \frac{7}{2}. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-4.3.

Učiteljica Vesna odlučila je zasladiti dan svojim učenicima kojih je 200 u razredu. Kupila je 33 čokoladice Životinjsko carstvo i 101 čokoladnu torticu. Svi učenici su bili taj dan na nastavi i svatko je dobio jedan originalno zapakiran slatkiš. Objasnite kako je to moguće? Koliko je učenica, a koliko učenika u tom razredu ako su njihovi brojevi u omjeru $3:5$?

Rješenje.

To je moguće u brojevnom sustavu s bazom b. 1 bod

$$33_{(b)} + 101_{(b)} = 200_{(b)} \qquad \text{1 bod}$$

$$3b + 3 + b^2 + 1 = 2b^2$$

$$b^2 - 3b - 4 = 0 \qquad \text{1 bod}$$

Rješenja kvadratne jednadžbe su $b_1 = 4$, $b_2 = -1$, a kako baza ne može biti negativna, jedino rješenje je $b = 4$. 1 bod

$200_{(4)} = 32$ 1 bod

$\frac{3}{8} \cdot 32 = 12$, $\frac{5}{8} \cdot 32 = 20$.

Učenica ima 12, a učenika 20. 1 bod

Zadatak B-4.4.

Središtem kružnice $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 20 = 0$ prolaze pravci zadani jednadžbama $mx - y + 3 = 0$ i $x - ny + 2 = 0$. Odredite kut koji zatvaraju ti pravci.

Rješenje.

Jednadžba kružnice u središnjem obliku je $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 15 \Rightarrow S(1, -2)$. 1 bod

Ako uvrstimo koordinate središta u jednadžbe pravaca

$$y = mx + 3 \;\text{ i }\; y = \frac{1}{n}x + \frac{2}{n}$$

dobivamo $m = -5$, $n = -\frac{3}{2}$. 2 boda

Jednadžbe danih pravaca su

$p_1 \ldots\; y = -5x + 3$ i $p_2 \ldots\; y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$. 1 bod

Kut između pravaca p_1 i p_2 računamo iz

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = 1. \quad \text{1 bod}$$

Traženi kut je 45°. 1 bod

Zadatak B-4.5.

Za realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$ vrijede sljedeće jednakosti:

$$\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+2} = \cdots = \frac{x_{2016}}{x_{2016}+2016}, \quad x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{2016} = 2017.$$

Izračunajte x_{1008}.

Rješenje.

Uočimo

$$\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_i}{x_i+i}, \text{ za sve } i \in \{1, 2, \ldots, 2016\}. \quad \text{1 bod}$$

Tada je

$x_1(x_i + i) = x_i(x_1 + 1)$ pa je $x_i = i \cdot x_1$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$. 2 boda

Slijedi

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2016} = 2017$$

$$x_1 \cdot (1 + 2 + \cdot + 2016) = 2017$$

$$x_1 \cdot \frac{(1+2016) \cdot 2016}{2} = 2017 \quad \text{1 bod}$$

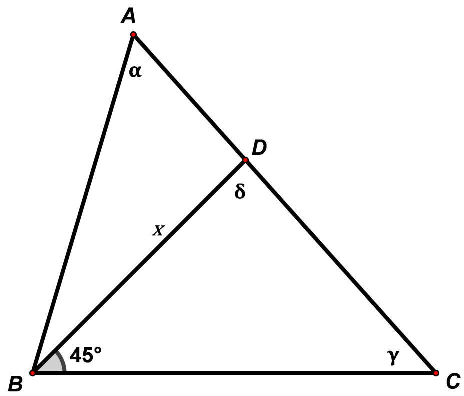
$$x_1 = \frac{1}{1008} \quad \text{1 bod}$$

$$x_{1008} = 1008 \cdot x_1 = 1. \quad \text{1 bod}$$

Zadatak B-4.6.

U trokutu ABC duljine stranica iznose $|\overline{AB}| = 7$, $|\overline{BC}| = 8$ i $|\overline{AC}| = 9$. Točka D nalazi se na stranici $\overline{AC}$ tako da je $\sphericalangle CBD = 45°$. Odredite duljinu dužine $\overline{BD}$ i omjer površina trokuta ABC i DBC.

Rješenje.



Neka je $\gamma = \sphericalangle BCA$, $\delta = \sphericalangle BDC$, $x = |\overline{BD}|$.
Prema poučku o kosinusu vrijedi

$$\cos\gamma = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{2}{3}, \qquad \text{2 boda}$$

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \text{1 bod}$$

Prema poučku o sinusu, vrijedi

$$\frac{x}{\sin\gamma} = \frac{8}{\sin\delta}, \qquad \text{1 bod}$$

$$x = \frac{8\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{8\sin\gamma}{\sin(180° - (45° + \gamma))} = \frac{8\sin\gamma}{\sin(45° + \gamma)} = \frac{8\sin\gamma}{\sin 45° \cos\gamma + \cos 45° \sin\gamma}, \qquad \text{2 boda}$$

$$x = \frac{8 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{8\sqrt{10}}{2 + \sqrt{5}} = 8\sqrt{10}(\sqrt{5} - 2). \qquad \text{1 bod}$$

Omjer površina je

$$\frac{P(ABC)}{P(DBC)} = \frac{8 \cdot 9 \sin\gamma}{x \cdot 8 \sin 45°} = \frac{9 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}}{8\sqrt{10}(\sqrt{5} - 2)\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \text{2 boda}$$

$$= \frac{3}{8(\sqrt{5} - 2)} = \frac{3(\sqrt{5} + 2)}{8}. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-4.7.

U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu $z^3 + |z| = 0$.

Prvo rješenje.

Zapišimo broj z u trigonometrijskom obliku, $z = r\cos\varphi + i\sin\varphi$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.
Tada iz dane jednadžbe slijedi

$$r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) + r = 0$$
$$r(r^2\cos 3\varphi + r^2 i\sin 3\varphi + 1) = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Tada je ili $r = 0$ ili $r^2\cos 3\varphi + r^2 i\sin 3\varphi + 1 = 0$. 2 boda
Ako je $r = 0$, $z = 0$ je rješenje dane jednadžbe.
Ako je $r^2\cos 3\varphi + r^2 i\sin 3\varphi + 1 = 0$, onda je $r^2\sin 3\varphi = 0$ i $r^2\cos 3\varphi + 1 = 0$. 2 boda
Iz prve jednadžbe dobivamo

$$\sin 3\varphi = 0 \Rightarrow \varphi \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}. \qquad \text{1 bod}$$

Iz druge jednadžbe slijedi

$$r^2\sin 3\varphi = -1 \Rightarrow \cos 3\varphi < 0 \Rightarrow \varphi \in \left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}, r = 1. \qquad \text{2 boda}$$

Rješenja jednadžbe su

$$z_1 = 0, z_2 = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1, z_4 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2 boda

Drugo rješenje.

Označimo kompleksni broj $z = x + iy$. Tada je

$$z^3 + |z| = 0$$
$$(x+iy)^3 + |x+iy| = 0$$
$$x^3 + 3x^2 iy - 3xy^2 - iy^3 + \sqrt{x^2+y^2} = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Realni i imaginarni dio kompleksnog broja na desnoj strani moraju biti 0 da bi vrijedila jednakost.

$$3x^2y - y^3 = 0 \ \text{ i } \ x^3 - 3xy^2 + \sqrt{x^2+y^2} = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Iz prve jednakosti slijedi $y(3x^2 - y^2) = 0$ pa imamo dva slučaja.
Prvi slučaj. Ako je $y = 0$, tada je $x^3 + \sqrt{x^2} = 0$ odnosno $x^3 + |x| = 0$. 2 boda
Ova jednadžba ima rješenja $x = 0$, $x = -1$. 1 bod
Drugi slučaj. Neka je $3x^2 - y^2 = 0$ tj. $y^2 = 3x^2$.
Tada je

$$x^3 - 3x \cdot 3x^2 + \sqrt{x^2 + 3x^2} = 0$$
$$x^3 - 9x^3 + 2|x| = 0$$
$$4x^3 - |x| = 0. \qquad \text{2 boda}$$

Ako je $x < 0$ onda je $4x^3 + x = 0$, $4x^2 + 1 = 0$, što u skupu $\mathbb{R}$ nema rješenja. 1 bod
Ako je $x > 0$, onda je $4x^3 - x = 0$, $4x^2 - 1 = 0$, $x = \frac{1}{2}$. 1 bod
Sva rješenja jednadžbe su

$$z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \text{1 bod}$$