Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

23. veljače 2016.

1. Ako je

$$\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}-\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}\right)\cdot\left(2+\frac{2}{1+\frac{1}{a-1}}\right)=\frac{1}{504},$$

koliko je $2a+1$?

2. Zbroj četiri broja iznosi 1001. Ako prvi broj umanjimo za 1, drugi umanjimo za 2, treći uvećamo za 2 i četvrti podijelimo s 2, sva će četiri dobivena broja biti jednaka. Odredite početne brojeve.

3. U trokutu ABC mjera kuta pri vrhu A iznosi $60°$ a mjera kuta pri vrhu B iznosi $45°$. Ako duljina stranice $\overline{AC}$ iznosi 8 cm, izračunajte opseg trokuta ABC.

4. S koliko nula završava broj koji se dobije množenjem prvih 2016 prirodnih brojeva?

5. Određeni broj kosaca trebao je pokositi dvije livade od kojih je druga upola manja od prve. Nakon što su polovinu dana svi kosili prvu livadu, polovina je kosaca nastavila kositi i pokosili su prvu livadu do kraja dana. Druga polovina kosaca otišla je pokositi drugu livadu ali je nisu pokosili, već je bilo potrebno da jedan kosac kosi još jedan cijeli dan kako bi pokosio ostatak. Koliko je bilo kosaca? (Pretpostavlja se da su svi kosci jednako vrijedni.)

6. Koliko ima prirodnih brojeva n manjih od 2016 takvih da izraz $(n-2)^3+n^3+(n+2)^3$ nije djeljiv s 18?

7. Neka je E polovište stranice $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$. Točka F je nožište okomice povučene iz vrha B na $\overline{AE}$. Dokažite da se duljine stranica trokuta EFB odnose kao $3:4:5$. Ako udaljenost vrha C od pravca BE iznosi 4 cm, odredite duljinu stranice kvadrata.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

23. veljače 2016.

1. U jednadžbi $x^2 + m - 3x = mx - 2$ odredite pozitivan realni broj m tako da ukupan zbroj svih rješenja jednadžbe i njihovih kvadrata bude 44.

2. Odredite kompleksni broj z tako da vrijedi

$$|z+2| = |1-\bar{z}| \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Re}\left(\frac{z}{2+3i}\right) = \frac{1}{13}.$$

3. Ako se neka dva realna broja razlikuju za 1, zbroj njihovih kvadrata nije manji od 0.5. Dokažite! Koliko ima parova cijelih brojeva koji se razlikuju za 1, a čiji zbroj kvadrata nije veći od 41?

4. U skupu cijelih brojeva riješite jednadžbu

$$x^8 + y^{2016} = 32x^4 - 256.$$

5. Točke M i N nalaze se redom na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ paralelograma $ABCD$. Pri tome vrijedi $\dfrac{|AM|}{|AB|} = \dfrac{2}{3}$ i $\dfrac{|AN|}{|AD|} = \dfrac{3}{4}$. Dužine $\overline{MN}$ i $\overline{AC}$ sijeku se u točki P. Koliko iznosi omjer $\dfrac{|AP|}{|AC|}$?

6. Studenti Marko i Luka radili su honorarno, Marko u turističkom uredu, a Luka u hotelu. Marko je za svoj posao dobio ukupno 200 kn. Luka je radio 5 sati manje od Marka i dobio 125 kn. Da je Marko radio onoliko sati koliko je radio Luka, a Luka onoliko koliko je radio Marko, onda bi Luka dobio 150 kn više od Marka. Koliko je sati radio Marko, a koliko Luka, te kolika je zarada po satu za svakog od njih?

7. Visina $\overline{CD}$ dijeli pravokutni trokut ABC na dva dijela u koja su upisane kružnice sa središtima S_1, S_2. Paralele s visinom $\overline{CD}$ kroz središta S_1, S_2 sijeku katete $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama M i N. Ako su duljine $|AC| = 8$, $|BC| = 6$, odredite duljine dužina $\overline{CM}$ i $\overline{CN}$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

23. veljače 2016.

1. Pokažite da vrijednost izraza

$$\sin^2\left(x-\frac{2016\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2017\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2018\pi}{3}\right)$$

ne ovisi o x.

2. Kolike su duljine kazaljki sata ako su njihove krajnje točke u 9 sati udaljene 8.5 cm, a u 10 sati 6.5 cm?

3. Dokažite da jednadžba $\sin(2016x)+\sin(x)=2$ nema rješenja u skupu realnih brojeva.

4. Veseli Štef je, vraćajući se s proslave prijateljevog rođendana, hodao po putanji koja se može opisati grafom funkcije $f(x)=2\sin^2 x+2\sin x+1$. Koliko je najmanje širok most bez ograde, čiju je cijelu duljinu Štef uspješno prešao i došao na drugu stranu? (Os x prati smjer mosta–od jedne obale do druge, a os y prati smjer toka rijeke.)

5. Toni i Lana igraju sljedeću igru. Toni prvo bira cijeli broj između 0 i 999, uključujući te brojeve, a zatim ga udvostruči i proslijedi Lani. Lana dobivenom broju doda 50 i proslijedi rezultat Toniju. Kad god Toni dobije broj, on ga udvostruči i proslijedi Lani, a Lana doda 50 i proslijedi Toniju. Pobjednik je onaj tko zadnji proslijedi broj manji od 1000. Odredite najmanji početni broj koji Tonija vodi do pobjede.

6. Tata Algebrić odlučio je potaknuti svoja dva sina da riješe zadatak, pa je rekao da će sami odrediti svoj džeparac za izlazak, i to na sljedeći način. Iz skupa $\{5,5^2,5^3,\ldots,5^{33}\}$ treba izabrati dva različita broja, a i b za koje će $\log_a b$ biti cijeli broj. Svatko će dobiti onoliko kuna koliko takvih parova brojeva napiše. Koliko je najviše kuna mogao zaraditi jedan od njih?

7. U pravokutnom trokutu zbroj duljina kateta i trostruke duljine visine na hipotenuzu iznosi 12. Trokut rotira oko pravca na kojem leži hipotenuza tako da nastaje rotacijsko tijelo maksimalnog oplošja. Koliki je obujam nastalog tijela?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

23. veljače 2016.

1. Riješite nejednadžbu $5 \cdot \binom{n+2}{n-1} > \binom{n+4}{4}$ u skupu prirodnih brojeva.

2. Odredite sve prirodne brojeve x, y za koje vrijedi $1! + 2! + \cdots + x! = y^2$.

3. Tri različita realna broja a, 2016 i b su tri uzastopna člana geometrijskog niza. Ako su brojevi $a + 2016$, $b + 2016$ i $a + b$ tri uzastopna člana aritmetičkog niza, odredite brojeve a i b.

4. Pravac t_1 dira lijevu, a njemu paralelni pravac t_2 desnu granu hiperbole $x^2 - y^2 = 1$. Ako pravci t_1 i t_2 sijeku os x pod kutem od $60°$, izračunajte njihovu međusobnu udaljenost.

5. Četverokutu $ABCD$ opisana je kružnica tako da je dijagonala $\overline{AC}$ promjer kružnice. Dokažite da su ortogonalne projekcije stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ na dijagonalu $\overline{BD}$ jednakih duljina.

6. Neka je $z = (1 - i\sqrt{3})^p$ i $w = (1 + i)^q$. Odredite najmanje prirodne brojeve p i q tako da kompleksni brojevi z i w budu jednaki.

7. Za broj kažemo da je *naizgled–prost* broj ako je složen, ali nije djeljiv s 2, 3 ili 5. Tri najmanja naizgled–prosta broja su 49, 77 i 91. Postoji 168 prostih brojeva koji su manji od 1000. Koliko je naizgled–prostih brojeva koji su manji od 1000?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.