ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

23. veljače 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Ako je

$$\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}-\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}\right)\cdot\left(2+\frac{2}{1+\frac{1}{a-1}}\right)=\frac{1}{504},$$

koliko je $2a+1$?

Rješenje.

Pojednostavnimo prvo izraz na lijevoj strani dane jednakosti.

$$\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}-\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}\right)\cdot\left(2+\frac{2}{1+\frac{1}{a-1}}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{1+\frac{a}{a+1}}-\frac{1}{1+\frac{a}{a-1}}\right)\cdot\left(2+\frac{2}{\frac{a}{a-1}}\right)= \qquad \text{1 bod}$$

$$\left(\frac{a+1}{2a+1}-\frac{a-1}{2a-1}\right)\cdot\left(\frac{2a+2a-2}{a}\right)= \qquad \text{1 bod}$$

$$\left(\frac{2a^2-a+2a-1-2a^2+2a-a+1}{(2a+1)(2a-1)}\right)\cdot\left(\frac{4a-2}{a}\right)= \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{2a}{(2a+1)(2a-1)}\cdot\frac{2(2a-1)}{a}=\frac{4}{2a+1}. \qquad \text{1 bod}$$

Početna jednadžba prelazi u

$$\frac{4}{2a+1}=\frac{1}{504}. \qquad \text{1 bod}$$

Slijedi $2a+1=2016$. 1 bod

Zadatak B-1.2.

Zbroj četiri broja iznosi 1001. Ako prvi broj umanjimo za 1, drugi umanjimo za 2, treći uvećamo za 2 i četvrti podijelimo s 2, sva će četiri dobivena broja biti jednaka. Odredite početne brojeve.

Prvo rješenje.

Označimo tražene brojeve s a, b, c i d. Tada je

$$a+b+c+d=10001 \qquad \text{1 bod}$$

$$a-1=b-2=c+2=\frac{d}{2} \qquad \text{1 bod}$$

Izrazimo li a, b i c pomoću d, dobivamo

$$a=\frac{d}{2}+1,\ b=\frac{d}{2}+2 \text{ i } c=\frac{d}{2}-2. \qquad \text{1 bod}$$

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo

$$\frac{d}{2}+1+\frac{d}{2}+2+\frac{d}{2}-2+d=1001, \text{ tj.} \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{5d}{2}=1000,\ d=400, a=201, b=202, c=198. \qquad \text{2 boda}$$

Drugo rješenje.

Neka su ta 4 jednaka broja x. Onda su polazni brojevi $x+1, x+2, x-2$ i $2x$. 2 boda

Tada vrijedi $x+1+x+2+x-2+2x=1001$. 1 bod

Slijedi $5x=1000$, odnosno $x=200$. 1 bod

Prvi traženi broj je $x+1=201$,
drugi je broj $x+2=202$,
treći je broj $x-2=198$ i četvrti je broj $2x=400$. 2 boda

Zadatak B-1.3.

U trokutu ABC mjera kuta pri vrhu A iznosi 60° a mjera kuta pri vrhu B iznosi 45°.
Ako duljina stranice $\overline{AC}$ iznosi 8 cm, izračunajte opseg trokuta ABC.

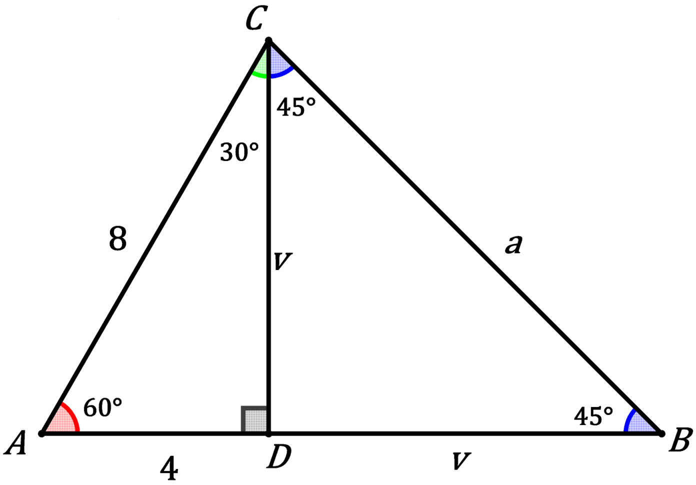
Rješenje.

Neka je $|BC| = a$, $|AC| = b = 8$, $|AB| = c$, a neka je $|CD| = v$ (visina iz vrha C).

Mjera kuta pri vrhu C iznosi $180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$.

Trokut ADC je pola jednakostraničnog trokuta. 1 bod

Trokut BCD je jednakokračan pravokutan trokut, pa je $|BD| = |CD|$. 1 bod



Slijedi

$$|AD| = 4 \text{ cm}, \quad v = |CD| = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}.$$ 2 boda

Tada su duljine preostalih stranica: $|AB| = |AD| + |DB| = (4 + 4\sqrt{3})$ cm, $|BC| = v\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$ cm. 1 bod

Opseg trokuta ABC iznosi

$$o = 8 + (4 + 4\sqrt{3}) + 4\sqrt{6} = 4(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}) \text{ cm}.$$ 1 bod

Zadatak B-1.4.

S koliko nula završava broj koji se dobije množenjem prvih 2016 prirodnih brojeva?

Rješenje.

Treba izračunati s koliko će nula završavati broj

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2014 \cdot 2015 \cdot 2016.$$

Nula se dobije umnoškom $2 \cdot 5$, odnosno ako se množi višekratnik broja 2 s višekratnikom broja 5. Očito je višekratnika broja 5 manje nego višekratnika broja 2. 1 bod

Tada je broj nula u danom umnošku jednak eksponentu najveće potencije broja 5 kojom je djeljiv dani umnožak. 1 bod

Treba prebrojiti višekratnike brojeva 5, 5^2, 5^3, 5^4 koji su manji od 2016.

$$
\begin{aligned}
\lfloor 2016 : 5 \rfloor &= 403 \\
\lfloor 2016 : 25 \rfloor &= 80 \\
\lfloor 2016 : 125 \rfloor &= 16 \\
\lfloor 2016 : 625 \rfloor &= 3
\end{aligned}
$$

3 boda

Dakle, najveća potencija broja 5 koja se javlja u umnošku $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2014 \cdot 2015 \cdot 2016$ je $5^{403+80+16+3} = 5^{502}$ pa dani umnožak završava s 502 nule. 1 bod

Zadatak B-1.5.

Određeni broj kosaca trebao je pokositi dvije livade od kojih je druga upola manja od prve. Nakon što su polovinu dana svi kosili prvu livadu, polovina je kosaca nastavila kositi i pokosili su prvu livadu do kraja dana. Druga polovina kosaca otišla je pokositi drugu livadu ali je nisu pokosili, već je bilo potrebno da jedan kosac kosi još jedan cijeli dan kako bi pokosio ostatak. Koliko je bilo kosaca? (Pretpostavlja se da su svi kosci jednako vrijedni.)

Rješenje.

Neka je x broj kosaca, a n broj dana koji su potrebni da jedan kosac sam pokosi prvu livadu. Tada za jedan dan kosac pokosi $\frac{1}{n}$–ti dio livade. Za prvu livadu vrijedi

$$x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} = 1, \text{ odnosno } \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = n.$$

2 boda

Za drugu livadu vrijedi

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2}, \text{ odnosno } \frac{x}{4} + 1 = \frac{n}{2}.$$

2 boda

Tada je

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{2} + \frac{x}{4} &= 2\left(\frac{x}{4} + 1\right), \\
\frac{x}{2} + \frac{x}{4} &= \frac{x}{2} + 2, \\
\frac{x}{4} &= 2, x = 8.
\end{aligned}
$$

Ukupno je 8 kosaca. 2 boda

Zadatak B-1.6.

Koliko ima prirodnih brojeva n manjih od 2016 takvih da izraz $(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3$ nije djeljiv s 18?

Prvo rješenje.

Nakon pojednostavljivanja danog izraza dobivamo

$$n^3 - 6n^2 + 12n - 8 + n^3 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 3n^3 + 24n = 3n(n^2 + 8) \qquad \text{1 bod}$$

Treba odrediti prirodne brojeve n za koje je umnožak $n(n^2+8)$ djeljiv sa 6. Imamo nekoliko mogućnosti:

1. Ako je n neparan broj, umnožak $n(n^2+8)$ nije paran pa nije ni djeljiv sa 6. 2 boda
2. Ako je n paran broj, umnožak $n(n^2+8)$ je djeljiv s 2.
   (a) Ako je uz to n djeljiv s 3, umnožak je djeljiv sa 6. 2 boda
   (b) Ako n nije djeljiv s 3, onda je n^2 oblika $3k+1$, pa je n^2+8 djeljivo sa 3. Umnožak $n(n^2+8)$ je djeljiv sa 6. 2 boda

Zaključujemo da su traženi brojevi svi neparni prirodni brojevi manji od 2016. 2 boda

Takvih brojeva ima 1008. 1 bod

Drugo rješenje.

Nakon pojednostavljivanja danog izraza dobivamo

$$n^3 - 6n^2 + 12n - 8 + n^3 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 3n^3 + 24n = 3n(n^2 + 8) \qquad \text{1 bod}$$

Dakle, dani izraz sigurno je djeljiv s 3. 1 bod

Ako je $n = 6k$, $k \in \mathbb{N}$, onda je dani izraz djeljiv s 18. 1 bod

Treba ispitati preostalih 5 mogućnosti, odnosno za $n = 6k + l$, $l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Neka je $n = 6k + l$. Tada je

$$n^2 + 8 = (6k + l)^2 + 8 = 36k^2 + 12kl + l^2 + 8 = 6(6k^2 + 2kl) + l^2 + 8. \qquad \text{1 bod}$$

Kako je $l^2 + 8 \in \{9, 12, 17, 24, 33\}$, dobiveni je izraz djeljiv sa 6 ako je $l = 2$ ili $l = 4$. 2 boda

Zaključujemo da je $l \in \{1, 3, 5\}$. Prema tome, naš broj mora biti oblika $n = 6k + 1, 6k + 3, 6k + 5$. 1 bod

Prebrojimo sve takve brojeve manje od 2016.

Brojeva oblika $6k + 1 < 2016$, $0 \leqslant k < 336$, ima 336.

Analogno i za brojeve

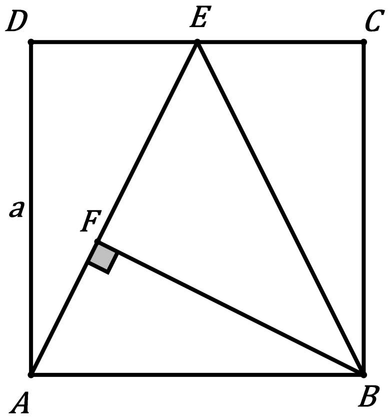
$$\begin{aligned} &6k + 3 < 2016, 0 \leqslant k < 336, \\ &6k + 5 < 2016, 0 \leqslant k < 336. \end{aligned} \qquad \text{2 boda}$$

Ukupno je danih prirodnih brojeva $3 \cdot 336 = 1008$. 1 bod

Zadatak B-1.7.

Neka je E polovište stranice $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$. Točka F je nožište okomice povučene iz vrha B na $\overline{AE}$. Dokažite da se duljine stranica trokuta EFB odnose kao $3:4:5$. Ako udaljenost vrha C od pravca BE iznosi 4 cm, odredite duljinu stranice kvadrata.

Rješenje.



Neka je a duljina stranice kvadrata. Tada je

$$|AE| = |BE| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \qquad \text{1 bod}$$

$$P_{ABCD} = 2P_{AEB} \qquad \text{1 bod}$$

$$a^2 = |AE| \cdot |BF| = \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot |BF| \qquad \text{1 bod}$$

$$|BF| = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \qquad \text{1 bod}$$

$$|EF| = \sqrt{|BE|^2 - |BF|^2} = \frac{3a\sqrt{5}}{10} \qquad \text{1 bod}$$

$$|EF| : |FB| : |EB| = \frac{3a\sqrt{5}}{10} : \frac{2a\sqrt{5}}{5} : \frac{a\sqrt{5}}{2} \qquad \text{1 bod}$$

$$|EF| : |FB| : |EB| = 3 : 4 : 5. \qquad \text{1 bod}$$

Ako je $|AE| = |BE|$ i $d = d(C, \overline{BE}) = 4$, tada iz $2P_{\triangle BCE} = P_{\triangle ABE}$, slijedi

$$d \cdot |BE| = \frac{|BF| \cdot |AE|}{2}, \qquad \text{1 bod}$$

$$4 \cdot |BE| = \frac{|BF| \cdot |BE|}{2},$$

$$|BF| = 8 \text{ cm}. \qquad \text{1 bod}$$

Tada iz

$$|BF| = \frac{2a\sqrt{5}}{5} = 8,$$

slijedi $a = \dfrac{20}{\sqrt{5}}$ cm, odnosno $a = 4\sqrt{5}$ cm. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

23. veljače 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

U jednadžbi $x^2 + m - 3x = mx - 2$ odredite pozitivan realni broj m tako da ukupan zbroj svih rješenja jednadžbe i njihovih kvadrata bude 44.

Rješenje.

Danu jednadžbu $x^2 + m - 3x = mx - 2$ pišemo u obliku $x^2 - (m+3)x + m + 2 = 0$. 1 bod

Rješenja ove kvadratne jednadžbe moraju zadovoljavati uvjet $x_1 + x_2 + x_1^2 + x_2^2 = 44$, odnosno $x_1 + x_2 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 44$. 1 bod

Prema Vieteovim formulama slijedi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= m + 3 \\ x_1 x_2 &= m + 2. \end{aligned}$$ 1 bod

Uvrstimo u dani uvjet $m + 3 + (m+3)^2 - 2(m+2) = 44$ i nakon sređivanja slijedi $m^2 + 5m - 36 = 0$. 1 bod

Ova jednadžba ima rješenja $m_1 = -9$, $m_2 = 4$. 1 bod

Kako se traži pozitivan broj m, rješenje je $m = 4$. 1 bod

Zadatak B-2.2.

Odredite kompleksni broj z tako da vrijedi

$$|z+2| = |1-\overline{z}| \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Re}\left(\frac{z}{2+3i}\right) = \frac{1}{13}.$$

Rješenje.

Iz prve jednadžbe $|z+2| = |1-\overline{z}|$ dobivamo $(x+2)^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2$, odnosno $x = -\dfrac{1}{2}$ 2 boda

Iz druge jednadžbe slijedi

$$\operatorname{Re}\frac{z}{2+3i} = \operatorname{Re}\left(\frac{x+yi}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{2x+3y}{13} - \frac{3x-2y}{13}i\right) = \frac{2x+3y}{13},$$ 1 bod

$$\frac{2x+3y}{13} = \frac{1}{13} \quad \Rightarrow \quad 2x + 3y = 1.$$ 1 bod

Iz $2x+3y=1$ i $x=-\frac{1}{2}$ slijedi da je $y=\dfrac{2}{3}$. 1 bod

Dakle, $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}i$. 1 bod

Zadatak B-2.3.

Ako se neka dva realna broja razlikuju za 1, zbroj njihovih kvadrata nije manji od 0.5. Dokažite! Koliko ima parova cijelih brojeva koji se razlikuju za 1, a čiji zbroj kvadrata nije veći od 41?

Rješenje.

Treba pokazati da je $x^2+(x+1)^2 \geqslant 0.5$, za sve $x \in \mathbb{R}$. 1 bod

Dana je nejednakost ekvivalentna

$$\begin{aligned} x^2+(x+1)^2-0.5 &\geqslant 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2+2x+0.5 &\geqslant 0 \\ \Leftrightarrow 4x^2+4x+1 &\geqslant 0 \\ \Leftrightarrow (2x+1)^2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$ 2 boda

Posljednja je nejednakost istinita za sve realne brojeve x.

Još treba vidjeti koliko cijelih brojeva zadovoljava nejednakost $x^2+(x+1)^2 \leqslant 41$.

Ova je nejednakost ekvivalentna s

$$2x^2+2x+1 \leqslant 41$$

odnosno $x^2+x-20 \leqslant 0$, 1 bod
pa su rješenja

$$x \in [-5,4] \cap \mathbb{Z} = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}.$$ 1 bod

Dakle, ima ukupno 10 parova cijelih brojeva koji zadovoljavaju traženi uvjet. 1 bod

To su

$$(-5,-4),\ (-4,-3),\ (-3,-2),\ (-2,-1),\ (-1,0),\ (0,1),\ (1,2),\ (2,3),\ (3,4).\ (4,5)$$

Napomena: Za posljednji bod nije nužno ispisati parove brojeva, samo treba zaključiti da ih je 10.

Zadatak B-2.4.

U skupu cijelih brojeva riješite jednadžbu

$$x^8+y^{2016}=32x^4-256.$$

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
x^8 + y^{2016} &= 32x^4 - 256 \\
y^{2016} &= -x^8 + 32x^4 - 256 \\
y^{2016} &= -(x^4 - 16)^2
\end{aligned}
$$
1 bod

Lijeva strana jednadžbe je $\geqslant 0$, a desna strana je $\leqslant 0$. 1 bod

Jednakost je moguća ako i samo ako su obje strane $= 0$. 1 bod

$$y^{2016} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$
1 bod

$$x^4 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 2, \quad x_{3,4} = \pm 2i$$
1 bod

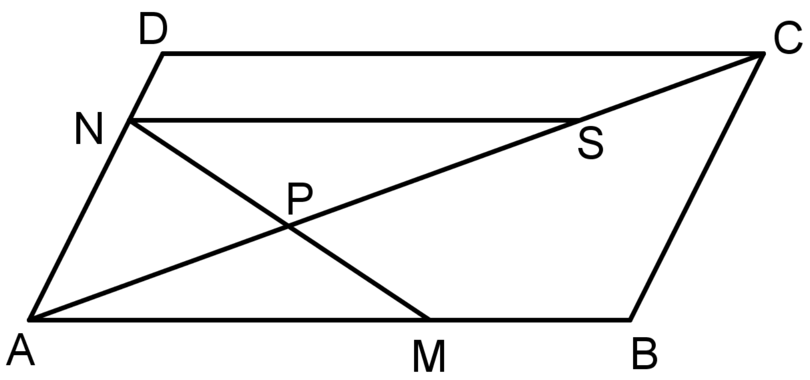
Traže se cjelobrojna rješenja, pa su konačna rješenja $(2, 0)$ i $(-2, 0)$. 1 bod

Zadatak B-2.5.

Točke M i N nalaze se redom na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ paralelograma $ABCD$. Pri tome vrijedi $\dfrac{|AM|}{|AB|} = \dfrac{2}{3}$ i $\dfrac{|AN|}{|AD|} = \dfrac{3}{4}$. Dužine $\overline{MN}$ i $\overline{AC}$ sijeku se u točki P. Koliko iznosi omjer $\dfrac{|AP|}{|AC|}$?

Rješenje.

Označimo $a = |AB|$, $b = |AD|$. Slijedi $|AM| = \dfrac{2}{3}a$, $|AN| = \dfrac{3}{4}b$.



Neka je $S \in \overline{AC}$ tako da je $NS \parallel AB$. 1 bod

Očito je $\triangle ANS \sim \triangle ADC$ (KK) s koeficijentom sličnosti $\dfrac{3}{4}$ pa slijedi
$|NS| = \frac{3}{4}a$, $|AS| = \frac{3}{4}|AC|$. 1 bod

Kako je $\sphericalangle APM = \sphericalangle SPN$ (vršni kutovi) i $\sphericalangle MAP = \sphericalangle NSP$ (kutovi s paralelnim kracima), vrijedi $\triangle PSN \sim \triangle PAM$. 1 bod

Tada je

$$\frac{|AP|}{|SP|}=\frac{|AM|}{|SN|} \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{|AP|}{|AS|-|AP|}=\frac{\frac{2}{3}a}{\frac{3}{4}a} \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{|AP|}{\frac{3}{4}|AC|-|AP|}=\frac{8}{9}$$

$$9|AP|=6|AC|-8|AP|$$

$$\frac{|AP|}{|AC|}=\frac{6}{17} \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-2.6.

Studenti Marko i Luka radili su honorarno, Marko u turističkom uredu, a Luka u hotelu. Marko je za svoj posao dobio ukupno 200 kn. Luka je radio 5 sati manje od Marka i dobio 125 kn. Da je Marko radio onoliko sati koliko je radio Luka, a Luka onoliko koliko je radio Marko, onda bi Luka dobio 150 kn više od Marka. Koliko je sati radio Marko, a koliko Luka, te kolika je zarada po satu za svakog od njih?

Rješenje.

$n =$ broj sati koliko je radio Marko, $n > 5$.
$x =$ Markova zarada po satu, $y =$ Lukina zarada po satu

Tada imamo sljedeći sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} nx &= 200, \\ (n-5)y &= 125, \\ ny-(n-5)x &= 150. \end{aligned} \qquad \text{2 boda}$$

Iz prve i druge jednadžbe izrazimo x, y:

$$x=\frac{200}{n}, \quad y=\frac{125}{n-5}. \qquad \text{1 bod}$$

Uvrstimo u treću jednadžbu:

$$n\cdot\frac{125}{n-5}-(n-5)\cdot\frac{200}{n}=150, \qquad \text{2 boda}$$

$$\begin{aligned} 125n^2-200(n-5)^2 &= 150n(n-5), \\ 5n^2-8(n-5)^2 &= 6n(n-5), \\ 9n^2-110n+200 &= 0, \end{aligned} \qquad \text{2 boda}$$

odakle dobivamo $n=10$ ili $n=\frac{20}{9}$.

Rješenje $n=\frac{20}{9}$ ne zadovoljava uvjet $n>5$, pa je $n=10$. 1 bod

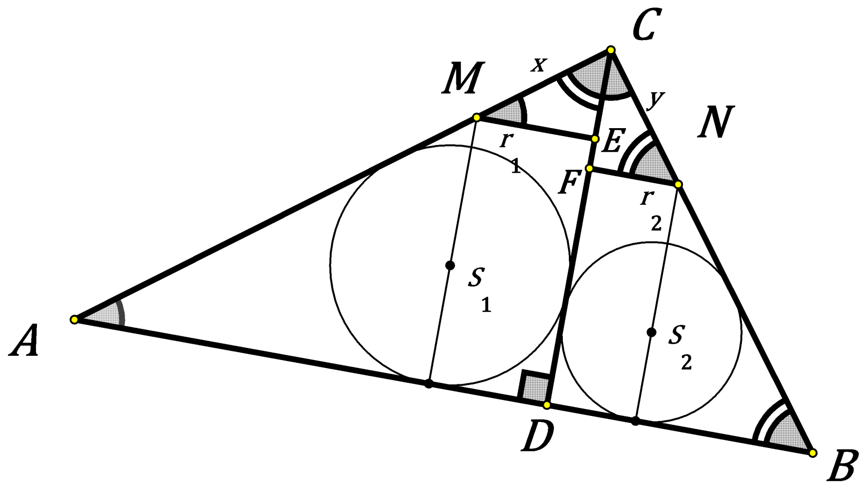
Marko je radio 10 sati, a Luka $n-5=5$ sati. 1 bod

Marko po satu zaradi $\frac{200}{10}=20$ kn, a Luka $\frac{125}{5}=25$ kn. 1 bod

Zadatak B-2.7.

Visina $\overline{CD}$ dijeli pravokutni trokut ABC na dva dijela u koja su upisane kružnice sa središtima S_1, S_2. Paralele s visinom $\overline{CD}$ kroz središta S_1, S_2 sijeku katete $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama M i N. Ako su duljine $|AC| = 8$, $|BC| = 6$, odredite duljine dužina $\overline{CM}$ i $\overline{CN}$.

Rješenje.



1 bod

U trokutu ABC računamo $c = 10$, $\sin\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. 2 boda

Iz trokuta ACD je $|AD| = 8\cos\alpha = \frac{32}{5}$, $|CD| = 8\sin\alpha = \frac{24}{5}$, 1 bod

$$r_1 = \frac{|CD| \cdot |AD|}{|CD| + |AD| + |AC|} = \frac{8}{5} \qquad \text{po formuli } P = rs$$

ili

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(|CD| + |AD| - |AC|\right) = \frac{8}{5} \qquad \text{jer je } a + b = c + 2r$$

2 boda

Iz trokuta BDC je $|BD| = 6 \cdot \sin\alpha = \frac{18}{5}$,

$$r_2 = \frac{|CD| \cdot |BD|}{|CD| + |BD| + |BC|} = \frac{6}{5} \qquad \text{ili} \qquad r_2 = \frac{1}{2}\left(|CD| + |BD| - |BC|\right) = \frac{6}{5}.$$

2 boda

Iz trokuta CME slijedi

$$x = \frac{r_1}{\cos\alpha} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{4}{5}} = 2.$$

1 bod

Analogno iz trokuta CNE dobivamo

$$y = \frac{r_2}{\sin\alpha} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{3}{5}} = 2.$$

1 bod

Napomena: Učenici mogu tražene duljine računati koristeći sličnost trokuta ABC, ACD, CBD, MCE i CNF (umjesto trigonometrije).

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

23. veljače 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Pokažite da vrijednost izraza

$$\sin^2\left(x-\frac{2016\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2017\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2018\pi}{3}\right)$$

ne ovisi o x.

Rješenje.

$$\sin^2\left(x-\frac{2016\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2017\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2018\pi}{3}\right)=$$

$$\sin^2(x-672\pi)+\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}-672\pi\right)+\sin^2\left(x-\frac{2\pi}{3}-672\pi\right)=$$

$$\sin^2(x)+\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=$$ 2 boda

$$\sin^2(x)+\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\cos x\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2=$$

$$\sin^2(x)+\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}-\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=$$ 2 boda

$$\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+\frac{3}{4}\cos^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+\frac{3}{4}\cos^2 x=$$

$$\frac{3}{2}\sin^2 x+\frac{3}{2}\cos^2 x=\frac{3}{2}.$$ 2 boda

Napomena: Alternativno, možemo koristiti formulu za dvostruki kut:

$$\sin^2(x)+\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$\frac{1-\cos(2x)}{2}+\frac{1-\cos(2x-\frac{2\pi}{3})}{2}+\frac{1-\cos(2x-\frac{4\pi}{3})}{2}.$$

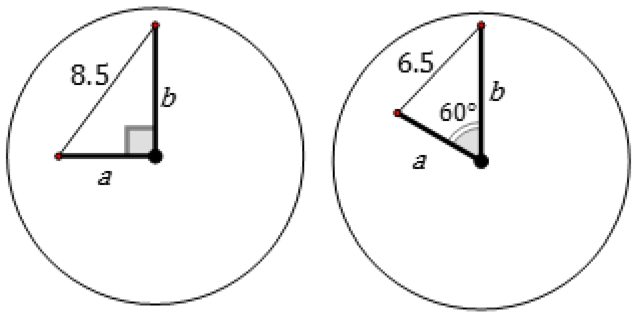
Preostaje dokazati činjenicu da je $\cos(2x)+\cos(2x-\frac{2\pi}{3})+\cos(2x-\frac{4\pi}{3})=0$.

Zadatak B-3.2.

Kolike su duljine kazaljki sata ako su njihove krajnje točke u 9 sati udaljene 8.5 cm, a u 10 sati 6.5 cm?

Rješenje.

Na slici je položaj kazaljki u 9 i 10 sati. U prvom slučaju kazaljke zatvaraju kut od $90°$, a u drugom od $60°$.



2 boda

Iz nacrtanih trokuta proizlazi

$$a^2 + b^2 = \frac{289}{4}$$
$$a^2 + b^2 - 2ab\cos 60° = \frac{169}{4}.$$ 2 boda

Dobiveni sustav je ekvivalentan s

$$a + b = \frac{23}{2}$$
$$ab = 30.$$ 1 bod

Rješenje ovog sustava je $a = 4$ cm, $b = 7.5$ cm, dakle mala kazaljka je duga 4 cm, a velika 7.5 cm. 1 bod

Zadatak B-3.3.

Dokažite da jednadžba $\sin(2016x) + \sin(x) = 2$ nema rješenja u skupu realnih brojeva.

Prvo rješenje.

S obzirom da najveća vrijednost funkcije $\sin x$ iznosi 1, dana jednakost može biti ispunjena samo ako je $\sin x = 1$ i $\sin 2016x = 1$. 2 boda

Tada je

$$x = \frac{\pi}{4032} + \frac{l\pi}{1008}, l \in \mathbb{Z} \quad \text{i} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$ 1 bod

Odavde slijedi

$$\frac{\pi}{4032} + \frac{l\pi}{1008} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ pa je}$$
$$4l - 8064k = 2015, \text{ to jest}$$
$$4(l - 2016k) = 2015.$$ 1 bod

Lijeva strana posljednje jednadžbe je djeljiva sa četiri, a desna nije pa zaključujemo da dana jednadžba nema rješenja. 2 boda

Drugo rješenje.

$\sin 2016x = 1$ i $\sin x = 1$. 2 boda

Jednadžbu $\sin x = 1$ zadovoljavaju svi realni brojevi oblika $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Za sve takve x je $\sin 2016x = \sin 1008\pi = 0$. 2 boda

Dakle, niti za jedan realan broj x, za koji je $\sin x = 1$, $\sin 2016x$ nema vrijednost 1 pa jednadžba nema realnih rješenja. 1 bod

Zadatak B-3.4.

Veseli Štef je, vraćajući se s proslave prijateljevog rođendana, hodao po putanji koja se može opisati grafom funkcije $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sin x + 1$. Koliko je najmanje širok most bez ograde, čiju je cijelu duljinu Štef uspješno prešao i došao na drugu stranu? (Os x prati smjer mosta–od jedne obale do druge, a os y prati smjer toka rijeke.)

Rješenje.

Širina mosta jednaka je razlici minimalne i maksimalne vrijednosti funkcije f. 1 bod

Funkcija f poprima maksimalnu vrijednost za $\sin x = 1$ i za te vrijednosti iznosi 5. 1 bod

S druge strane,

$$f(x) = 2\sin^2 x + 2\sin x + 1 = 2\left[\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 1 = 2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$ 1 bod

Za $\sin x = -\frac{1}{2}$ funkcija f poprima minimalnu vrijednost koja iznosi $\frac{1}{2}$. 1 bod

Most je širok najmanje $5 - \frac{1}{2} = 4.5$ metara. 2 boda

Napomena: Minimum se mogao odrediti i supstitucijom $t = \sin x$ te određivanjem minimuma kvadratne funkcije, uz komentar da se t za koji funkcija postiže minimum doista nalazi među vrijednostima $[-1, 1]$ koje postiže $\sin x$.

Zadatak B-3.5.

Toni i Lana igraju sljedeću igru. Toni prvo bira cijeli broj između 0 i 999, uključujući te brojeve, a zatim ga udvostruči i proslijedi Lani. Lana dobivenom broju doda 50 i proslijedi rezultat Toniju. Kad god Toni dobije broj, on ga udvostruči i proslijedi Lani, a Lana doda 50 i proslijedi Toniju. Pobjednik je onaj tko zadnji proslijedi broj manji od 1000. Odredite najmanji početni broj koji Tonija vodi do pobjede.

Prvo rješenje.

Neka je x početni Tonijev broj. Slijed igre prikazan je tablicom:

Igrač	Toni	Lana	Toni	Lana	Toni	Lana	Toni
Dobiveni broj	2x	2x + 50	4x + 100	4x + 150	8x + 300	8x + 350	16x + 700

2 boda

Očito Toni ne može napraviti više od četiri udvostručavanja jer bi već za $x = 1$ peto Tonijevo udvostručavanje prešlo 1000. 1 bod

Zadnji Tonijev izračunati broj mora biti između 950 i 999. 1 bod

Odavde slijedi

$$950 < 16x + 700 < 1000,$$

$$250 < 16x < 300,$$

$$16 \leqslant x \leqslant 18. \qquad \text{1 bod}$$

Provjerimo slijed igre za $x = 16$. Zadnji Tonijev izračunati broj je 956, a gledajući unazad, brojevi su 478, 428, 214, 164, 82, 32, 16. Dakle, Toni treba započeti brojem 16 kako bi pobijedio u igri, a to je i najmanji takav broj. 1 bod

Drugo rješenje.

Računamo unazad intervale u kojima su dobiveni brojevi Lane i Tonija. Tonijev zadnji izračunati broj mora biti između 950 i 999; prije toga je zadnji Lanin broj, i tako dalje. Pišemo:

$$950 < T_4 \leqslant 999$$

$$475 < L_3 \leqslant 499$$

$$425 < T_3 \leqslant 449$$

$$212 < L_2 \leqslant 224$$

$$162 < T_2 \leqslant 174$$

$$81 < L_1 \leqslant 87$$

$$31 < T_1 \leqslant 37$$

$$15 < x \leqslant 18 \qquad \text{4 boda}$$

Početni broj x koji je Toni izabrao je jedan od brojeva $16, 17, 18$. 1 bod

Provjerimo da za $x = 16$ Toni doista dolazi do pobjede: 16, 32, 82, 164, 214, 428, 478, 956. Zaključujemo da je 16 najmanji broj s kojim Toni može pobijediti. 1 bod

Napomena: Dovoljno je da učenik u drugom rješenju ispiše samo lijevu nejednakost u nizu napisanih dvostrukih nejednakosti jer se traži najmanji broj s danim svojstvom.

Zadatak B-3.6.

Tata Algebrić odlučio je potaknuti svoja dva sina da riješe zadatak, pa je rekao da će sami odrediti svoj džeparac za izlazak, i to na sljedeći način. Iz skupa $\{5, 5^2, 5^3, \ldots, 5^{33}\}$ treba izabrati dva različita broja, a i b za koje će $\log_a b$ biti cijeli broj. Svatko će dobiti onoliko kuna koliko takvih parova brojeva napiše. Koliko je najviše kuna mogao zaraditi jedan od njih?

Rješenje.

Neka je $a=5^x$, $b=5^y$, gdje su x i y brojevi iz skupa $\{1,2,3,\ldots,32,33\}$. Tada je

$$\log_a b=\log_{5^x} 5^y=\frac{y}{x}.$$ 2 boda

Ovaj će razlomak biti cijeli broj ako i samo ako je y višekratnik broja x, veći od x, a manji ili jednak 33. Imamo sljedeće slučajeve: 1 bod

$x=1 \Rightarrow y\in\{2,3,\ldots,33\}$ što je ukupno 32 para oblika $(1,y)$.

$x=2 \Rightarrow y\in\{4,6,8,\ldots,32\}$ što je ukupno $\left\lfloor\frac{33}{2}\right\rfloor-1=15$ parova oblika $(2,y)$.

$x=3 \Rightarrow y\in\{6,9,12\ldots,33\}$ što je ukupno $\left\lfloor\frac{33}{3}\right\rfloor-1=10$ parova oblika $(3,y)$.

$x=4 \Rightarrow y\in\{8,12,16\ldots,32\}$ što je ukupno $\left\lfloor\frac{33}{4}\right\rfloor-1=7$ parova oblika $(4,y)$.

$x=5 \Rightarrow y\in\{10,15,20,25,30\}$ što je ukupno $\left\lfloor\frac{33}{5}\right\rfloor-1=5$ parova oblika $(5,y)$.

$x=6 \Rightarrow y\in\{12,18,24,30\}$ što je ukupno $\left\lfloor\frac{33}{6}\right\rfloor-1=4$ para oblika $(6,y)$.

$x=7 \Rightarrow y\in\{14,21,28\}$ što je ukupno $\left\lfloor\frac{33}{7}\right\rfloor-1=3$ para oblika $(7,y)$.

$x=8 \Rightarrow y\in\{16,24,32\}$ što je ukupno $\left\lfloor\frac{33}{8}\right\rfloor-1=3$ para oblika $(8,y)$.

Višekratnika brojeva $9,10,11$ manjih od 33 ima po 2, a višekratnika brojeva $12,13,14,15,16$ ima samo po 1. 6 bodova

Ukupan broj parova iznosi

$$32+15+10+7+5+4+3+3+3\cdot 2+5\cdot 1=90.$$

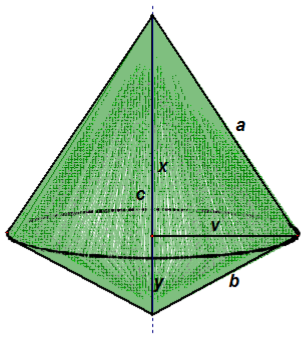
Zaključujemo da jedan od sinova može zaraditi maksimalno 90 kn. 1 bod

Zadatak B-3.7.

U pravokutnom trokutu zbroj duljina kateta i trostruke duljine visine na hipotenuzu iznosi 12. Trokut rotira oko pravca na kojem leži hipotenuza tako da nastaje rotacijsko tijelo maksimalnog oplošja. Koliki je obujam nastalog tijela?

Rješenje.

Rotacijom pravokutnog trokuta oko hipotenuze nastaje tijelo koje se sastoji od dva stošca sa zajedničkom bazom polumjera jednakog visini na hipotenuzu.



1 bod

Oplošje se sastoji od dva plašta kojima su izvodnice katete a i b danog pravokutnog trokuta. Polumjer baze stošca je visina v danog pravokutnog trokuta. Imamo, dakle,

$$a + b + 3v = 12,$$
$$O = v\pi a + v\pi b = v\pi(12 - 3v) = 3\pi(-v^2 + 4v).$$

1 bod

Oplošje će biti maksimalno za onaj v za koji funkcija $f(v) = -v^2 + 4v$ postiže maksimum, dakle za

$$v = -\frac{4}{-2} = 2.$$

1 bod

Iz $a + b = 12 - 3v$ slijedi $a + b = 6\,(1)$. 1 bod

Iz $\frac{ab}{2} = \frac{cv}{2}$ slijedi $ab = cv = 2c\,(2)$. 1 bod

Kvadriranjem jednakosti (1) imamo $(a + b)^2 = 36$, $a^2 + 2ab + b^2 = 36$.

Tada zbog (2) i Pitagorinog poučka ($a^2 + b^2 = c^2$) posljednja jednakost prelazi u

$c^2 + 4c - 36 = 0$. 2 boda

Pozitivno rješenje dobivene kvadratne jednadžbe je $c = -2 + 2\sqrt{10}$. 1 bod

Traženi je obujam zbroj obujama dvaju stožaca koji imaju iste baze, te visine x, odnosno y.

$$V = \frac{1}{3}v^2\pi x + \frac{1}{3}v^2\pi y = \frac{1}{3}v^2\pi(x + y) = \frac{1}{3}v^2\pi c.$$

1 bod

Konačno, dobivamo $V = \frac{8}{3}\pi(\sqrt{10} - 1)$ kubičnih jedinica. 1 bod

Napomena: Za prvi bod dovoljno je nacrtati skicu ili dati opis riječima tijela koje nastaje.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

23. veljače 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Riješite nejednadžbu $5 \cdot \binom{n+2}{n-1} > \binom{n+4}{4}$ u skupu prirodnih brojeva.

Rješenje.

Nejednadžba se može zapisati kao $5 \cdot \binom{n+2}{3} > \binom{n+4}{4}$, 1 bod

odnosno $5 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{6} > \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{24}$. 1 bod

Pomnožimo li s nazivnikom i podijelimo s $(n+1)(n+2)$ dobivamo

$$\begin{aligned} 20n &> (n+3)(n+4) \\ n^2 - 13n + 12 &< 0. \end{aligned}$$ 2 boda

Rješenja ove nejednadžbe su prirodni brojevi $n \in \{2, 3, \ldots, 11\}$. 2 boda

Zadatak B-4.2.

Odredite sve prirodne brojeve x, y za koje vrijedi $1! + 2! + \cdots + x! = y^2$.

Rješenje.

Ako je $x = 1$, $1! = 1^2$.
Ako je $x = 2$, $1! + 2! = 3 \neq y^2$.
Ako je $x = 3$, $1! + 2! + 3! = 3^2$.
Ako je $x = 4$, $1! + 2! + 3! + 4! = 33 \neq y^2$. 2 boda
Ako je $x \geqslant 5$, $x!$ završava znamenkom 0 a zbroj $1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + x!$ završava znamenkom 3. 2 boda

Kako kvadrat prirodnog (cijelog) broja y ne može završavati znamenkom 3, jedina rješenja su

$$x = 1, y = 1 \text{ i } x = 3, y = 3, \text{ odnosno } (x, y) \in \{(1,1), (3,3)\}.$$ 2 boda

Napomena: Ukoliko učenici samo pogode uređene parove koji su rješenje, bez provjere, dodijeliti jedan bod. Za prva dva boda mora biti napravljena provjera za sve od $x = 1$ do $x = 4$.

Zadatak B-4.3.

Tri različita realna broja a, 2016 i b su tri uzastopna člana geometrijskog niza. Ako su brojevi $a+2016$, $b+2016$ i $a+b$ tri uzastopna člana aritmetičkog niza, odredite brojeve a i b.

Rješenje.

$a+2016$, $b+2016$, $a+b$ je aritmetički niz te je

$$b+2016=\frac{a+2016+a+b}{2}$$
$$a=\frac{b+2016}{2}.$$ 1 bod

$a, 2016, b$ je geometrijski niz kojem je $q=\frac{2016}{a}=\frac{b}{2016}$.

Slijedi $ab=2016^2$. 1 bod

$$\frac{b+2016}{2}\cdot b=2016^2,$$
$$b^2+2016b-2\cdot 2016^2=0.$$ 1 bod

Slijedi

$$b=\frac{-2016\pm\sqrt{2016^2+8\cdot 2016^2}}{2}=\frac{-2016\pm 3\cdot 2016}{2}$$ 1 bod
$$b_1=2016,\ b_2=-4032.$$ 1 bod

Iz $b\neq 2016$ slijedi da je $b=-4032$. Tada je $a=\frac{b+2016}{2}=-1008$. 1 bod

Zadatak B-4.4.

Pravac t_1 dira lijevu, a njemu paralelni pravac t_2 desnu granu hiperbole $x^2-y^2=1$. Ako pravci t_1 i t_2 sijeku os x pod kutem od 60°, izračunajte njihovu međusobnu udaljenost.

Rješenje.

Tražimo tangente oblika $y=kx+l$.

Iz $k=\pm\operatorname{tg}60^\circ$ dobivamo $k=\pm\sqrt{3}$. 1 bod

Za zadanu hiperbolu je $a=b=1$.

Koristimo uvjet tangencijalnosti $k^2a^2-b^2=l^2$ te slijedi $l^2=2, l=\pm\sqrt{2}$. 2 boda

Tangente su:

$$t_1\ldots y=x\sqrt{3}+\sqrt{2}$$
$$t_2\ldots y=x\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

ili

$$t_1\ldots y=-x\sqrt{3}+\sqrt{2}$$
$$t_2\ldots y=-x\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$ 1 bod

Označimo sa O ishodište koordinatnog sustava. Međusobna udaljenost tangenti je $2 \cdot d(O, t_1) = 2 \cdot d(O, t_2) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. 2 boda

Napomena: Traženu udaljenost može se računati i na sljedeći način.

Odaberemo li npr. točku $T(0, \sqrt{2})$ na pravcu t_1, računamo udaljenost do pravca t_2 po formuli:

$$d(T, t_2) = \frac{|0 - \sqrt{2} - \sqrt{2}|}{\sqrt{3+1}} = \sqrt{2}.$$

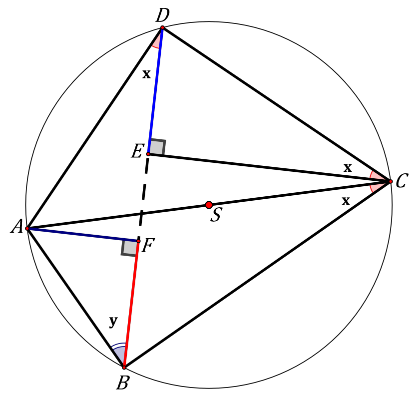
Udaljenost je ista bez obzira koji smo par tangenti odabrali.

Stoga učenik može napisati samo jedan ili oba para tangenti te za to dobiti sve predviđene bodove.

Zadatak B-4.5.

Četverokutu $ABCD$ opisana je kružnica tako da je dijagonala $\overline{AC}$ promjer kružnice. Dokažite da su ortogonalne projekcije stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ na dijagonalu $\overline{BD}$ jednakih duljina.

Prvo rješenje.



$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = x$ i $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = y$ (obodni kutevi nad istom tetivom). 1 bod

Kutevi $\sphericalangle ADC$ i $\sphericalangle ABC$ su kutevi nad promjerom pa je njihova mjera $90°$, a trokuti ABC i ACD su pravokutni. 1 bod

$\sphericalangle ADE = x$ pa je $\sphericalangle EDC = 90° - x$, a $\sphericalangle DCE = x$. 1 bod

Iz trokuta ABF je $|BF| = |AB| \cos \sphericalangle ABF = |AB| \cos y$.

Iz trokuta ABC je $|AB| = 2R \sin x$.

Slijedi $|BF| = 2R \sin x \cos y$. 1 bod

Iz trokuta DEC je $|DE| = |DC| \sin \sphericalangle ECD = |DC| \sin x$, a iz trokuta ACD je $|DC| = 2R \cos \sphericalangle ACD = 2R \cos y$.

Slijedi da je $|DE| = 2R \sin x \cos y$ pa prema tome vrijedi $|BF| = |DE|$. 2 boda

Drugo rješenje.

Neka je $c = |CD|, a = |AB|$. Računamo:

$$|DE| = c \cdot \cos\sphericalangle CDE \text{ (iz pravokutnog trokuta } CDE) \quad \text{1 bod}$$
$$= c \cdot \cos\sphericalangle CAB \text{ (} \sphericalangle CDE \text{ i } \sphericalangle CAB \text{ su obodni nad istom tetivom)} \quad \text{2 boda}$$
$$= c \cdot \frac{a}{2R} \text{ (iz pravokutnog trokuta } ABC). \quad \text{1 bod}$$

Analogno dobivamo i $|BF| = a \cdot \frac{c}{2R}$ (ne treba računati zbog "simetrije" u dobivenom izrazu).

Prema tome, $|BF| = |DE|$. 2 boda

Treće rješenje.

Neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ obodni kutevi redom nad tetivama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. Pripadni središnji kutevi su $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$.

Zbog uvjeta da je AC promjer vrijedi $2\alpha + 2\beta = 2\gamma + 2\delta = 180^\circ$ $(*)$. 2 boda

Po poučku o sinusima (ili iz pravokutnih trokuta ABC, ACD) znamo:

$|AB| = 2R\sin\alpha$, $|CD| = 2R\sin\gamma$. 1 bod

Vrijedi da je: $|BF| = |AB|\cos\sphericalangle ABD = |AB|\cos\delta = 2R\sin\alpha\cos\delta$, te

$|DE| = |CD|\cos\sphericalangle BDC = 2R\sin\gamma\cos\beta$. 2 boda

Kako zbog $(*)$ vrijedi $\sin\alpha = \cos\beta$ i $\sin\gamma = \cos\delta$, time je tvrdnja dokazana. 1 bod

Zadatak B-4.6.

Neka je $z = (1 - i\sqrt{3})^p$ i $w = (1 + i)^q$. Odredite najmanje prirodne brojeve p i q tako da kompleksni brojevi z i w budu jednaki.

Prvo rješenje.

Zapišimo kompleksne brojeve $1 - i\sqrt{3}$, $1 + i$ u trigonometrijskom obliku:

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \quad \text{1 bod}$$
$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right). \quad \text{1 bod}$$

Tada je

$$z = 2^p\left(\cos\frac{5p\pi}{3} + i\sin\frac{5p\pi}{3}\right) \quad \text{1 bod}$$
$$w = \sqrt{2}^q\left(\cos\frac{q\pi}{4} + i\sin\frac{q\pi}{4}\right). \quad \text{1 bod}$$

Ako je $z = w$, onda je $2^p = \sqrt{2}^q$ i $\frac{5p\pi}{3} = \frac{q\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 2 boda

Iz $2^p = \sqrt{2}^q$ odnosno $2^p = 2^{\frac{q}{2}}$ slijedi $q = 2p$. 1 bod

$$\begin{aligned}
\frac{5p\pi}{3} - \frac{q\pi}{4} &= 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
\frac{5p\pi}{3} - \frac{2p\pi}{4} &= 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
\frac{7p\pi}{6} &= 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
p &= \frac{12}{7}k,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$ 1 bod

Dakle, najmanja vrijednost broja k za koju je p prirodan broj iznosi 7. 1 bod

Tada je $p = 12$, $q = 24$. 1 bod

Drugo rješenje.

Uočimo da iz $|z| = |w|$ slijedi $2^p = \left(\sqrt{2}\right)^q$. Tada je $2p = q$. 2 boda

Tražimo p takav da je $(1 - i\sqrt{3})^p = (1 + i)^{2p}$, odnosno,

$(1 - i\sqrt{3})^p = (2i)^p$, $\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^p = i^p$. 2 boda

Lijeva strana može imati samo 6 vrijednosti:

$1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

(za $p \in \{6m, 6m+1, 6m+2, 6m+3, 6m+4, 6m+5\}$, $m \in \mathbb{N}$). 1 bod

Desna strana može imati 4 vrijednosti $1, i, -1, -i$ (za $p \in \{4l, 4l+1, 4l+2, 4l+3\}$, $l \in \mathbb{N}$). 1 bod

Budući da lijeva i desna strana moraju biti jednake, broj p je takav da su obje jednake 1 ili obje jednake -1. 1 bod

U prvom slučaju je $p = 6m = 4l$, odnosno p je djeljiv s 3 i s 4 pa je $p = 12k$, $k \in \mathbb{N}$. 1 bod

U drugom je slučaju $p = 6m + 3 = 4l + 2$ što je nemoguće jer bi p istovremeno bio i paran i neparan. 1 bod

Konačno, rješenje su svi brojevi p djeljivi s 12. Najmanji traženi brojevi su $p = 12$, $q = 24$. 1 bod

Zadatak B-4.7.

Za broj kažemo da je *naizgled–prost* broj ako je složen, ali nije djeljiv s 2, 3 ili 5. Tri najmanja naizgled–prosta broja su 49, 77 i 91. Postoji 168 prostih brojeva koji su manji od 1000. Koliko je naizgled–prostih brojeva koji su manji od 1000?

Prvo rješenje.

Brojeva manjih od 1000 koji su:

djeljivi s 2 je $\left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor = 499$; djeljivi s 3 $\left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor = 333$; djeljivi s 5 $\left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor = 199$. 3 boda

Djeljivih s 6 ima $\left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor = 166$, djeljivih s 10 $\left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor = 99$, djeljivih s 15 $\left\lfloor \frac{999}{15} \right\rfloor = 66$, djeljivih s 30 $\left\lfloor \frac{999}{30} \right\rfloor = 33$. 2 boda

Ukupan broj brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi s 2 ili s 3 ili s 5 je:

$499 + 333 + 199 - 166 - 99 - 66 + 33 = 733$. 2 boda

Ostalih brojeva ima $999 - 733 = 266$. 1 bod

Među njima su svi prosti brojevi manji od 1000 osim brojeva 2, 3 i 5, ukupno njih $168 - 3 = 165$. Među preostalim brojevima je i broj 1 koji nije ni prost ni složen.

Stoga je ukupan broj naizgled–prostih brojeva $266 - 165 - 1 = 100$. 2 boda

Drugo rješenje.

Naizgled–prosti brojevi su oblika:

$p^2, p^3, p^4, \dots, pq, pq^2, pq^3, pq^4, \dots, p^2q^2, p^2q^3, p^2q^4, \dots, \dots, pqr, pqr^2, \dots \ (*)$

gdje su $p, q, r, \dots$ prosti brojevi veći od 5. 1 bod

Vrijedi $7^4 > 1000$, $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001 > 1000$. Provjeravat ćemo koje sve vrijednosti mogu imati brojevi p, q za koje brojevi $(*)$ daju naizgled–proste brojeve manje od 1000. 2 boda

p^2 je manji od 1000 za $p \in \{7, 11, 13, \dots, 31\}$. Takvih je 8 brojeva. 1 bod

p^3 je manji od 1000 za $p = 7$, dakle 1 broj. 1 bod

pq^2 je manji od 1000 za $(p, q) \in \{(7, 11), (7, 13), (7, 17), (7, 19), (11, 7)\}$. Takvih je 5 brojeva. 1 bod

Dalje brojimo koliko ima naizgled–prostih brojeva oblika pq.

Za $p = 7$, $q \in \{11, 13, \dots, 139\}$. Takvih je 30 brojeva. 1 bod

Za $p = 11$, $q \in \{13, \dots, 89\}$. Takvih je 19 brojeva.

Za $p = 13$, $q \in \{17, \dots, 73\}$. Takvih je 15 brojeva.

Za $p = 17$, $q \in \{19, \dots, 53\}$. Takvih je 9 brojeva.

Za $p = 19$, $q \in \{23 \dots, 47\}$. Takvih je 7 brojeva.

Za $p = 23$, $q \in \{29 \dots, 43\}$. Takvih je 5 brojeva.

Za $p = 29$, $q = 31$ i takav je samo jedan broj. 2 boda

Dakle, ukupno je 100 naizgled–prostih brojeva manjih od 1000. 1 bod

Napomena: Ako je učenik naveo sve mogućnosti za p i q, ali ih nije točno prebrojao, oduzeti jedan bod ili dva boda za više od dvije greške u prebrajanju.