Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 5. travnja 2016.

1. Neka je $a > 1$. Točke (x, y) za čije koordinate vrijedi $|x| + y = a$, $x^2 + y = a|x|$ određuju u koordinatnoj ravnini lik površine 120 kvadratnih jedinica. Izračunajte realan broj a.

2. Riješite nejednadžbu

$$\frac{x-8}{2012}+\frac{x-7}{2013}+\frac{x-6}{2014}+\frac{x-5}{2015}+\frac{x-4}{2016} \leqslant \frac{x-2012}{8}+\frac{x-2013}{7}+\frac{x-2014}{6}+\frac{x-2015}{5}+\frac{x-2016}{4}.$$

3. U skupu prostih brojeva riješite jednadžbu

$$2p^3 - q^2 = 2(p+q)^2.$$

4. Tri prijatelja Ante, Bojan i Vinko pogađaju nepoznat šesteroznamenkasti broj koji je složen od znamenaka $1, 2, 3, 4, 5, 6$, pri čemu se znamenke ne ponavljaju. Ante je rekao da je to broj 123456, Bojan 245163, a Vinko 463215. Niti jedan od njih trojice nije pogodio točno o kojem se broju radi, međutim Ante je pogodio točne pozicije za 3 znamenke, Bojan također za 3 znamenke, a Vinko poziciju za 1 znamenku. Odredite nepoznati broj.

5. Točka M nalazi se na kateti $\overline{BC}$ pravokutnog trokuta ABC tako da vrijedi $|BM| = 2 \cdot |MC|$. Ako je K polovište hipotenuze $\overline{AB}$, dokažite da je $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MKC$. Odredite omjer površina trokuta MKC i trokuta ABC.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 5. travnja 2016.

1. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x^3 + x^3y^3 + y^3 &= 17 \\ x + xy + y &= 5. \end{aligned}$$

2. Kate i Mare su se često nadmetale u rješavanju matematičkih zadataka. Profesoru je dosadilo njihovo nadmetanje pa im je dao zadatak kojeg moraju rješavati zajedničkim snagama. Kate je na ploči redom ispisivala 2016 brojeva, s tim da je svaki od brojeva bio ili $\sqrt{2}-1$ ili $\sqrt{2}+1$. Mare je redom pomnožila prvi i drugi broj, zatim treći i četvrti, i tako sve do zadnja dva napisana broja, a zatim je sve te umnoške zbrojila i zapisala rezultat. Ako zbroj nije bio cijeli broj Kate ga je obrisala. Postupak su morale ponoviti dok na ploči ne napišu sve cijele brojeve koje može poprimiti Marin zbroj. Koliko je takvih zbrojeva ostalo na ploči?

3. Duljine stranica šesterokuta $ABCDEF$ su redom $|AB| = b$, $|BC| = |CD| = a$, $|DE| = b$, $|EF| = |FA| = a$, $a \neq b$. Šesterokutu je opisana kružnica polumjera 8 sa središtem u točki O. Ako je $\cos\sphericalangle EFO = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, izračunajte opseg i površinu tog šesterokuta.

4. Ako za realne brojeve x, y vrijedi jednakost $|x+y| + |x-y| = 2$, odredite maksimalnu vrijednost izraza $x^2 - 6x + y^2$.

5. Kompleksni brojevi z_1, z_2, z_3 pridruženi su točkama kompleksne ravnine A, B, C koje su od ishodišta udaljene za 2016. Ako za kompleksne brojeve z_1, z_2, z_3 vrijedi $z_1+z_2+z_3 = 0$, izračunajte duljine stranica trokuta ABC.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 5. travnja 2016.

1. Neka je $a > 0$, $a \neq 1$ realan broj. Za koje vrijednosti realnog parametra m jednadžba

$$\frac{a^{(\log m+2)x} + 2a^{\frac{2x+\log m}{x}}}{a^{2+2x}} = 3\,\frac{a^{\frac{1}{x}\cdot\log m}}{a^{2x}},$$

ima dva različita realna rješenja istog predznaka?

2. Odredite dva prirodna broja koja su djeljiva sa četiri i kojima je razlika kubova četveroznamenkasti broj djeljiv s 91.

3. Matko je za svoju web-stranicu napravio od krugova neobičan logo. Trokutu je konstruirao težišnice koje su trokut podijelile na 6 trokutića, te je svakom trokutiću konstruirao opisani krug. Mjerio je površine opisanih krugova i dobio zanimljivu jednakost

$$\frac{P_1}{P_2}\cdot\frac{P_3}{P_4}\cdot\frac{P_5}{P_6} = 1.$$

Dokažite Matkovu jednakost.
(Površine $P_1, \ldots, P_6$ su redom površine krugova opisanih susjednim trokutićima.)

4. Kolika je površina trokuta kojemu je zbroj kvadrata duljina stranica jednak 2016, a zbroj kotangensa kutova 18 ?

5. Svaka stranica konveksnog šesterokuta podijeljena je točkama na n dijelova. Među tim točkama biramo vrhove trokuta. Koliko je različitih trokuta time određeno?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 5. travnja 2016.

1. Neka je $a_1, a_2, \ldots$ niz brojeva definiran s

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1, \\
a_{n+1} &= \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} + 1 \qquad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Odredite a_{801}.

2. Dana je funkcija $f(x) = a\cos x + b\sin x$, gdje su a i b realni brojevi. Ako postoje $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, takvi da je $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$ i $\dfrac{x_1 - x_2}{\pi} \notin \mathbb{Z}$, onda je $a = b = 0$. Dokažite!

3. Trokutu ABC upisana je kružnica sa središtem u točki S. Kružnica dodiruje stranice trokuta u točkama $D \in \overline{BC}$, $E \in \overline{AC}$ i $F \in \overline{AB}$. Ako je $|AE| = 3\,\text{cm}$, $|CS| = 2\sqrt{7}\,\text{cm}$, a mjera kuta pri vrhu A je $60°$, izračunajte površinu trokuta ABC.

4. Barba Ante je, tražeći način kako da zabavi unuke Ivu i Matu, pronašao tri kartice. Na prvoj kartici s jedne strane piše broj 1, a s druge broj 4. Na drugoj kartici s jedne strane piše broj 2, a s druge strane broj 4. Na trećoj kartici s jedne strane piše broj 3, a s druge opet broj 4. Barba Ante je odmah znao kako će zaposliti unuke na dulje vrijeme. Mlađemu je Mati rekao da slaže te tri kartice u niz, a školarac Ivo trebao je zapisivati troznamenkaste brojeve koje Mate slaganjem kartica dobiva i na kraju još izračunati zbroj svih zapisanih brojeva. Pri tome Mate slučajno bira karticu i njezinu stranu. Koliko najviše različitih troznamenkastih brojeva može Ivo zapisati i koliko iznosi njihov zbroj?

5. Jednakostraničan trokut površine P zarotiramo u njegovoj ravnini za $30°$ oko težišta. Kolika je površina presjeka polaznog trokuta i trokuta dobivenog rotacijom?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.