MATEMATIČKI KLOKAN S
6 100 000 sudionika u 57 zemalja Europe, Amerike, Afrike i Azije
Četvrtak, 17. ožujka 2016. – Trajanje 75 minuta
Natjecanje za Student (IV. razred SŠ)

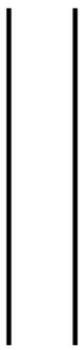
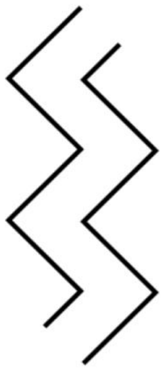
* Natjecanje je pojedinačno. **Računala su zabranjena**.
* **Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan**.
* Prvih osam pitanja donosi po 3 boda, drugih osam po 4 boda, a trećih osam po 5 bodova.
* Ako nijedan odgovor nije zaokružen ili su zaokružena dva ili više odgovora zadatak donosi 0 bodova.
* Ako je zaokruženi odgovor pogrešan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.
* Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.

Pitanja za 3 boda:

1. Zbroj godina Tome i Ivana je 23, zbroj godina Ivana i Aleksandra je 24 a zbroj godina Tome i Aleksandra je 25. Koliko godina ima najstariji od njih?

   A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

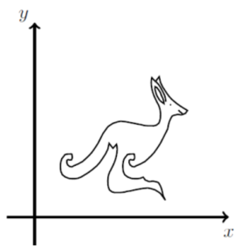
2. Marija želi sagraditi most preko rijeke i zna da je najkraći mogući most za bilo koju točku s jedne strane rijeke uvijek iste duljine. Koja od danih slika ne može biti slika njene rijeke?

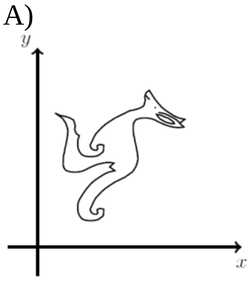
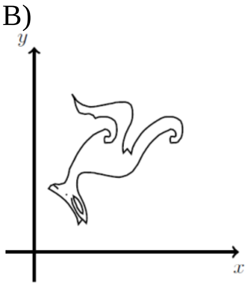
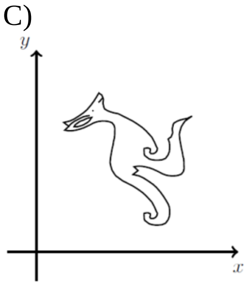
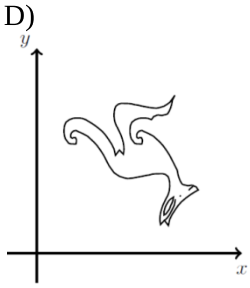
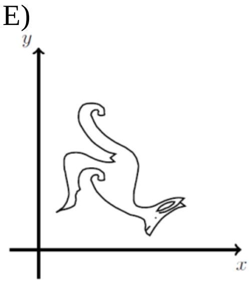
   A) 
   B) 
   C) 
   D) 
   E) 

3. Koliko je cijelih brojeva veće od $2015 \cdot 2017$ i manje od $2016 \cdot 2016$?

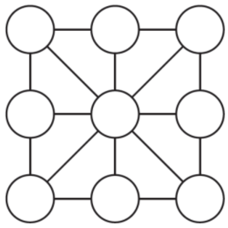
   A) 0 B) 1 C) 2015 D) 2016 E) 2017

4. Skup točaka u xy-ravnini tvori sliku klokana, kao na slici. Ako zamijenimo x i y koordinatu za svaku točku koja će od danih slika prikazivati rezultat?



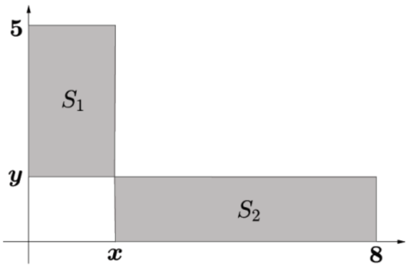
   A) 
   B) 
   C) 
   D) 
   E) 

5. Dijana želi upisati devet prirodnih brojeva u krugove na dijagramu tako da sume brojeva u vrhovima svakog od osam malih trokuta koje tvore bridovi budu identične. Koji je najveći broj različitih prirodnih brojeva koje ona može koristiti?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 8

6. Pravokutnici S_1 i S_2 na slici imaju iste površine. Odredi omjer $\frac{x}{y}$.

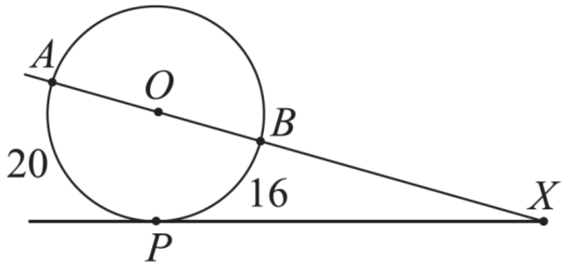


A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{8}{5}$

7. Ako je $x^2 - 4x + 2 = 0$, odredi $x + \frac{2}{x}$.

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

8. Duljine lukova AP i PB na slici su 20 i 16. Koliko iznosi mjera kuta $\angle PXA$?



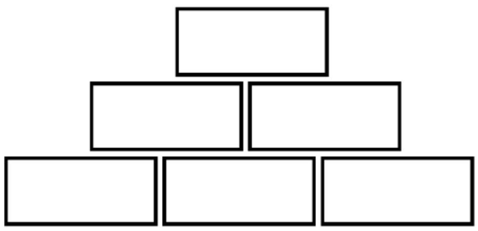
A) 30° B) 24° C) 18° D)15° E)10°

Pitanja za 4 boda:

9. Za prirodne brojeve a, b, c, d vrijedi $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$. Koji je od ovih brojeva najveći?

A) a B) b C) c D) d E) Nije moguće odrediti.

10. U ovoj piramidi brojeva svako gornje polje produkt je dvaju polja direktno ispod njega. Koji se od danih brojeva ne može pojaviti na vrhu piramide, ako se u donja tri polja nalaze prirodni brojevi veći od 1?



A) 56 B) 84 C) 90 D) 105 E) 220

11. Ako je $x_1 = 2$ i $x_{n+1} = x_n^{x_n}$ za $n \geq 1$ koliko iznosi x_4?

A) 2^{2^3} B) 2^{2^4} C) $2^{2^{11}}$ D) $2^{2^{16}}$ E) $2^{2^{768}}$

12. U pravokutniku $ABCD$ duljina stranice $\overline{BC}$ jednaka je polovici duljine dijagonale $\overline{AC}$. Neka je M točka na stranici $\overline{CD}$ takva da je $|AM| = |MC|$. Kolika je mjera kuta $\angle CAM$?

A) 12.5° B) 15° C) 27.5° D) 42.5° E) Ništa od navedenog.

13. Danka je razrezala pravokutnik površine 2016 na 56 jednakih kvadrata. Koliko postoji različitih pravokutnika površine 2016 koje je moguće razrezati na 56 jednakih kvadrata?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 0

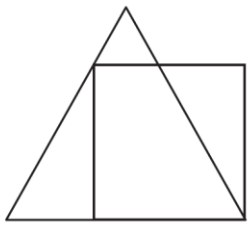
14. Na otoku Viteza i Lupeža žive samo dva tipa ljudi: Vitezovi (koji uvijek govore istinu) i Lupeži (koji uvijek lažu). Na svom putovanju po otoku sretneš 7 ljudi koji sjede oko logorske vatre. Svaki od njih reče: "Sjedim između dva Lupeža!". Koliko Lupeža sjedi oko vatre?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) Nije moguće odrediti.

15. Jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$ i $x^2 + bx + a = 0$ imaju realna rješenja. Znamo da je zbroj kvadrata rješenja prve jednadžbe jednak zbroju kvadrata rješenja druge jednadžbe i da je $a \neq b$. Koliko tada iznosi $a + b$?

A) 0 B) -2 C) 4 D) -4 E) Nije moguće odrediti.

16. Ako je opseg kvadrata na slici jednak 4, koliki je opseg jednakostraničnog trokuta na slici?



A) 4 B) $3 + \sqrt{3}$ C) 3 D) $3 + \sqrt{2}$ E) $4 + \sqrt{3}$

Pitanja za 5 bodova:

17. Koliko različitih realnih rješenja ima jednadžba

$$(x^2 - 4x + 5)^{x^2 + x - 30} = 1?$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) beskonačno

18. Četverokutu je upisana kružnica (svaka stranica četverokuta tangenta je te kružnice). Omjer opsega čeverokuta i opsega kružnice iznosi $4 : 3$. Koliki je tada omjer površine četverokuta i površine kruga omeđenog tom kružnicom?

A) $4 : \pi$ B) $3\sqrt{2} : \pi$ C) $16 : 9$ D) $\pi : 3$ E) $4 : 3$

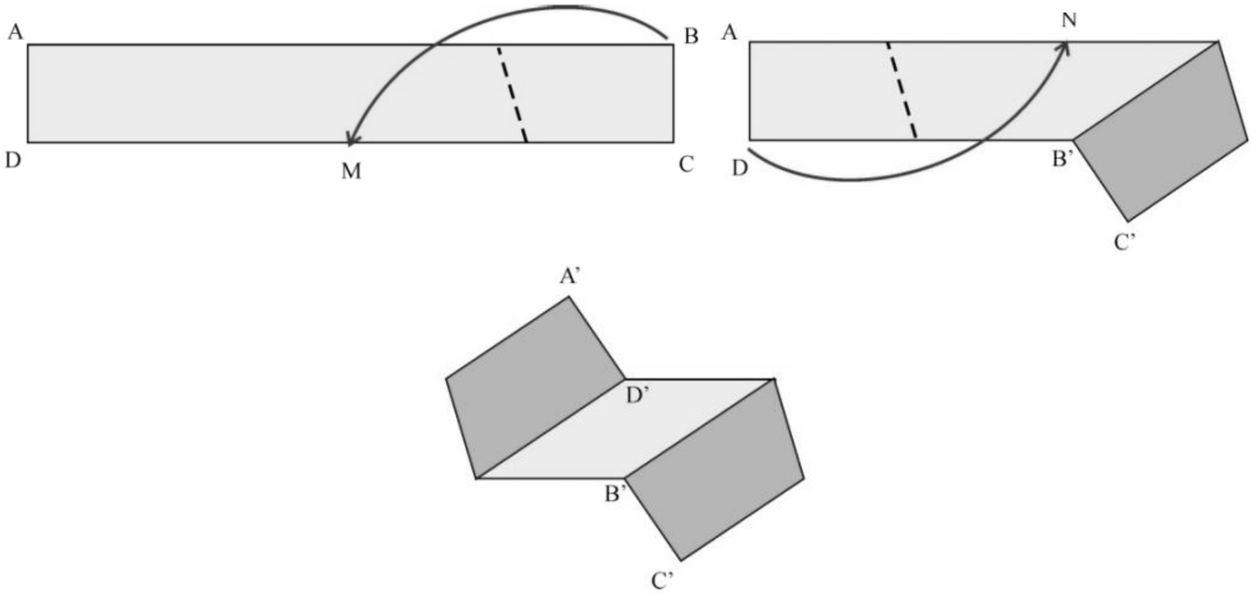
19. U pravokutnom se trokutu ABC (pravi kut je kod vrha A) simetrale šiljastih kutova sijeku u točki P. Ako je udaljenost točke P od hipotenuze $\sqrt{8}$, kolika je udaljenost točke P od vrha A?

A) 8 B) 3 C) $\sqrt{10}$ D) $\sqrt{12}$ E) 4

20. Kocka je razrezana na 6 piramida tako što smo danu točku unutar kocke povezali sa svakim vrhom kocke. Volumeni pet od tih pramida su 2, 5, 10, 11 i 14. Koliki je volumen šeste piramide?

A) 1 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

21. Pravokutna papirnata traka širine 5 cm i dužine 50 cm s jedne je strane svijetla, a s druge tamna. Kristina presavine traku tako da vrh B padne u polovište M stranice $\overline{CD}$. Zatim presavine traku tako da vrh D padne u polovište N stranice $\overline{AB}$. Kolika je površina (u cm^2) vidljivog svijetlog dijela na posljednjoj slici?

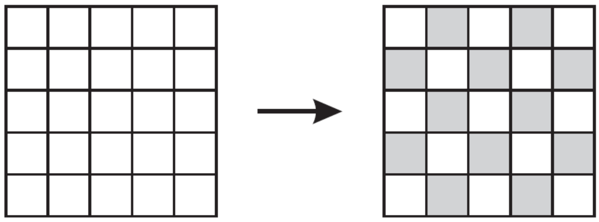


A) 50 B) 60 C) 62.5 D) 100 E) 125

22. Ana je izabrala prirodan broj n i zapisala sumu svih prirodnih brojeva od 1 do n. Prost broj p djelitelj je te sume, ali nije djelitelj niti jednog sumanda. Koji bi od danih brojeva mogao biti $n + p$?

A) 217 B) 221 C) 229 D) 245 E) 269

23. Kvadrat (5×5) podijeljen je na 25 polja. Sva polja su na početku bijela. U svakom potezu je dozvoljeno promijeniti boju trima uzastopnim poljima u retku ili stupcu u suprotnu boju (bijela polja postaju crna, a crna bijela). Koliko nam najmanje poteza treba kako bi dobili šahovnicu kao na slici?



A) manje od 10 B) 10 C) 12 D) više od 12 E) To nije moguće.

24. Prirodan broj N ima točno šest različitih djelitelja uključujući 1 i N. Produkt pet od tih djelitelja je 648. Koji od danih brojeva je šesti djelitelj broja N?

A) 4 B) 8 C) 9 D) 12 E) 24

Rješenja zadataka bit će objavljena 15. travnja 2016. godine na internet stranici HMD-a. Eventualne primjedbe na rješenja zadataka primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 22. travnja 2016. u 23:59.
Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 2. svibnja 2016. godine na oglasnoj ploči škole i na internet stranici HMD-a.
Primjedbe i žalbe učenika primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 9. svibnja 2016. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 23. svibnja 2016. godine.
Obavijesti se mogu dobiti na Internetu - **http://www.matematika.hr/klokan/2016/**.