ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

17. siječnja 2013.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Odredi realni broj a tako da $x = \frac{1}{2}$ bude rješenje jednadžbe

$$\left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{x+1} - \frac{4x^2}{x^2-1}\right)\left(\frac{1}{a^3+a^2} - \frac{1-a}{a^2} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$

Prvo rješenje.

Najprije sredimo izraze u zagradama:

$$\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{x+1} - \frac{4x^2}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2-(1-x)^2+4x^2}{1-x^2} = \frac{4x^2+4x}{1-x^2} = \frac{4x}{1-x},$$ 1 bod

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3+a^2} - \frac{1-a}{a^2} - 1 &= \frac{1}{a^2(a+1)} - \frac{1-a}{a^2} - 1\\ &= \frac{1-(1-a)(a+1)-a^2(a+1)}{a^2(a+1)}\\ &= \frac{a^2-a^2(a+1)}{a^2(a+1)} = \frac{-a^3}{a^2(a+1)} = -\frac{a}{a+1}.\end{aligned}$$ 1 bod

Stoga dana jednadžba postaje

$$\frac{4x}{1-x} \cdot \left(-\frac{a}{a+1}\right) = \frac{1}{2}.$$ 1 bod

Kako je vrijednost izraza $\frac{4x}{1-x}$ za $x = \frac{1}{2}$ jednaka $\frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 4$, 1 bod

da bi $x = \frac{1}{2}$ bilo rješenje te jednadžbe, mora biti $4\left(-\frac{a}{a+1}\right) = \frac{1}{2}$. 1 bod

Rješavanjem ove jednadžbe po a dobivamo redom

$$-\frac{a}{a+1} = \frac{1}{8}, \qquad -8a = a+1, \qquad -9a = 1$$

pa je $a = -\frac{1}{9}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Sređivanjem izraza

$$\frac{1}{a^3+a^2}-\frac{1-a}{a^2}-1=\frac{-a^3}{a^2(a+1)}=-\frac{a}{a+1} \qquad \text{1 bod}$$

i uvrštavanjem $x=\frac{1}{2}$ dana jednadžba postaje $-\frac{4a}{a+1}=\frac{1}{2}$. 4 boda

Rješavanjem ove jednadžbe po a dobivamo $a=-\frac{1}{9}$. 1 bod

Treće rješenje.

Kao u prvom rješenju dolazimo do jednadžbe

$$-\frac{4x}{1-x}\cdot\frac{a}{a+1}=\frac{1}{2}. \qquad \text{3 boda}$$

Rješavanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a+1}&=\frac{x-1}{8x}\\
a\cdot 8x&=(a+1)(x-1)\\
8ax&=ax+x-a-1\\
(7a-1)\,x&=-a-1\\
x&=-\frac{a+1}{7a-1}
\end{aligned} \qquad \text{1 bod}$$

Ako je $x=\frac{1}{2}$ rješenje jednadžbe, onda je $-\frac{a+1}{7a-1}=\frac{1}{2}$ 1 bod

odnosno $-2(a+1)=7a-1$ pa je $a=-\frac{1}{9}$. 1 bod

Napomena: Izraz u prvoj zagradi definiran je za sve $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$, a izraz u drugoj zagradi za sve $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$. Učeniku treba dodijeliti bodove neovisno od toga je li ovo napisao.

Zadatak A-1.2.

Na ispitu iz matematike rješava se 40 zadataka. Točan odgovor vrijedi 15 bodova, a netočan -4 boda. Dinko je riješio sve zadatke, no nažalost neke pogrešno. Koliko je pogrešnih odgovora dao, ako je ukupno imao 353 boda?

Rješenje.

Neka je Dinko pogrešno riješio x zadataka. 1 bod

Broj zadataka koje je točno riješio je $40-x$, 1 bod

pa ima ukupno $15 \cdot (40-x) - 4 \cdot x$ bodova. 2 boda

Stoga treba riješiti jednadžbu

$$15 \cdot (40-x) - 4 \cdot x = 353.$$ 1 bod

Sređivanjem se dobije jednadžba $600-19x=353$, odnosno $19x=247$, pa je rješenje $x=13$. 1 bod

Dinko je pogrešno riješio 13 zadataka.

Napomena: Učenik treba napisati što predstavlja nepoznanica koju je uveo ili napisati odgovor na kraju. Ako ne napiše ni jedno ni drugo, treba mu oduzeti 1 bod.

Zadatak A-1.3.

Duljine kateta pravokutnog trokuta su 6 cm i 8 cm. Koliki je polumjer tom trokutu opisane kružnice?

Rješenje.

Prema Pitagorinom teoremu duljina hipotenuze tog trokuta je 10 cm. 1 bod

U pravokutnom trokutu središte opisane kružnice je u polovištu hipotenuze, a duljina polumjera opisane kružnice jednaka je polovini duljine hipotenuze. 3 boda

Traženi polumjer je 5 cm. 2 boda

Zadatak A-1.4.

Samo je jedan djelitelj broja $3^{12}-1$ veći od 70 i manji od 80. Odredi ga.

Prvo rješenje.

Rastavimo dani broj na faktore:

$$\begin{aligned}
3^{12}-1 &= \left(3^6-1\right)\left(3^6+1\right) && \text{1 bod}\\
&= \left(3^3-1\right)\left(3^3+1\right)\left(3^6+1\right) && \text{1 bod}\\
&= (3-1)\left(3^3+3+1\right)(3+1)\left(3^2-3+1\right)\left(3^2+1\right)\left(3^4-3^2+1\right)\\
&= 2 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 73. && \text{3 boda}
\end{aligned}$$

Traženi djelitelj je broj 73. 1 bod

Napomena: Od učenika se ne traži da pokažu da nema drugih djelitelja između 70 i 80. Međutim, kada je poznat rastav na proste faktore $3^{12}-1 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73$ to se lagano provjeri.

Drugo rješenje.

Rastavimo promatrani broj $3^{12} - 1 = 27^4 - 1 = 729^2 - 1 = 531440$ 1 bod

na proste faktore:

$$\begin{aligned} 531440 &= 10 \cdot 8 \cdot 6643 \\ &= 2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 949 \\ &= 2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73 \end{aligned}$$ 4 boda

Traženi djelitelj je broj 73. 1 bod

Napomena: U ovom načinu rješavanja ne može se dati više od 1 bod učeniku koji pogriješi u računu.

Treće rješenje.

Direktno ćemo provjeriti da je $3^{12} - 1$ djeljivo sa 73. Rješenje zapisujemo pomoću kongruencija:

$$\begin{aligned} 3^{12} - 1 &= 81^3 - 1 = (73 + 8)^3 - 1 \\ &\equiv 8^3 - 1 \pmod{73} \\ &= 64 \cdot 8 - 1 = (73 - 9) \cdot 8 - 1 \\ &\equiv -9 \cdot 8 - 1 \equiv -73 \equiv 0. \pmod{73} \end{aligned}$$ 6 bodova

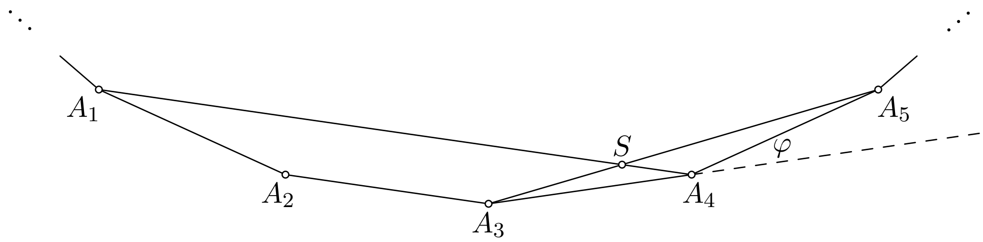
Napomena: Od učenika se ne traži da pokažu da nema drugih djelitelja između 70 i 80 pa da ovakvo rješenje treba priznati kao potpuno.
Prirodan pristup zadatku bio bi promatranje koji bi od brojeva 71, 72,..., 79 mogli biti djelitelji od $3^{12} - 1$. Brojeve djeljive s 3 lako je eliminirati. S ostalim brojevima može se postupiti slično kao što je ovdje napisano za broj 73 ili na neki drugi način.
Učenik koji eliminira neke od brojeva, za prvi eliminirani broj dobiva 1 bod i za svaka sljedeća dva eliminirana broja po 1 bod.

Zadatak A-1.5.

Dan je pravilni 2013-erokut $A_1A_2 \ldots A_{2013}$. Neka je S sjecište dužina $\overline{A_1A_4}$ i $\overline{A_3A_5}$. Odredi mjeru kuta $\sphericalangle A_3SA_4$.

Rješenje.

Neka je φ vanjski kut pravilnog 2013-terokuta. Vrijedi $\varphi = \dfrac{360°}{2013}$. 1 bod



Promatrajući jednakokračni trokut $A_3A_4A_5$ dobivamo da je $\sphericalangle A_5A_3A_4 = \frac{1}{2}\varphi$. 1 bod

Uočimo da je $A_1A_2A_3A_4$ jednakokračni trapez.
Stoga je $\sphericalangle A_1A_4A_3 = 180° - \sphericalangle A_2A_3A_4 = \varphi$. 1 bod

Sada promatrajući trokut A_3A_4S vidimo da je

$$\begin{aligned}\sphericalangle A_3SA_4 &= 180° - \sphericalangle SA_3A_4 - \sphericalangle A_3A_4S && \text{1 bod}\\ &= 180° - \frac{1}{2}\varphi - \varphi = 180° - \frac{3}{2}\varphi. && \text{1 bod}\end{aligned}$$

Konačno, traženi kut je

$$\sphericalangle A_3SA_4 = 180° - \frac{3}{2} \cdot \frac{360°}{2013} = 180° - 180° \cdot \frac{3}{2013} = \frac{2010}{2013} \cdot 180° = \frac{670}{671} \cdot 180°. \qquad \text{1 bod}$$

Napomena: Ovdje su radi preglednosti svi kutovi izraženi pomoću φ (to je ujedno i središnji kut). Analogno se boduju rezultati izraženi preko nekog drugog kuta ili eksplicitno napisani. Konačni rezultat treba priznati i ako posljednji razlomak nije skraćen.

Zadatak A-1.6.

Odredi najmanji prirodni broj n tako da je polovina od n kvadrat nekog prirodnog broja, trećina od n kub nekog prirodnog broja, a petina od n peta potencija nekog prirodnog broja.

Rješenje.

Neka je n traženi broj. Kako je n najmanji s opisanim svojstvima, a znamo da je djeljiv s 2, 3 i 5, mora biti oblika $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, gdje su a, b, c prirodni brojevi. 1 bod

Polovina tog broja je $2^{a-1} \cdot 3^b \cdot 5^c$. Da bi taj broj bio kvadrat prirodnog broja, eksponenti $a-1$, b i c moraju biti djeljivi s 2.

Analogno, trećina broja n je $2^a \cdot 3^{b-1} \cdot 5^c$ pa iz uvjeta da je trećina od n kub prirodnog broja zaključujemo da su a, $b-1$ i c djeljivi s 3.

Petina tog broja, $2^a \cdot 3^b \cdot 5^{c-1}$, bit će peta potencija prirodnog broja ako su a, b i $c-1$ djeljivi s 5. 4 boda

Treba odrediti najmanje prirodne brojeve a, b i c s tim svojstvima.

Najmanji broj a koji je djeljiv s 3 i 5, a nije djeljiv s 2 je $a = 15$.

Najmanji broj b koji je djeljiv s 2 i 5, takav da je $b-1$ djeljiv s 3 je broj $b = 10$,

a najmanji broj c koji je djeljiv s 2 i 3, takav da je $c-1$ djeljivo s 5 je broj $c = 6$. 4 boda

Stoga je traženi broj $n = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$. $(= 30\,233\,088\,000\,000)$ 1 bod

Napomena: U oba slučaja 4 boda se daje za tri analogna zaključka/rezultata. Ako učenik ima samo jedan (bilo koji) od tih rezultata treba mu dati 2 boda, a ako ima dva od tri rezultata, onda 3 boda.

Zadatak A-1.7.

Ivica i Marta imaju dva identična seta od pedeset karata s različitim simbolima. Svaki od njih promiješa svoj set karata. Potom Ivica stavi na stol svoj set karata, a zatim Marta stavi svoje karte na Ivičine. Ivica zatim broji koliko je karata između pojedine dvije identične karte, za svaki od 50 parova identičnih karata, te zbraja dobivene brojeve. Koje sve rezultate Ivica može dobiti?

Prvo rješenje.

Najprije ćemo pokazati da se rezultat ne mijenja ako dvije karte u Ivičinom setu zamijene mjesta. 1 bod

Recimo da se zamijene dvije karte međusobno "udaljene" za k mjesta (između kojih je $k-1$ karata). Neka je na prvoj od njih simbol A, a na drugoj simbol B. Tada se broj mjesta između dviju karata A (iz Ivičinog i Martinog seta) smanjio za k, ali se broj karata između dviju karata B povećao za k. Time se ukupni rezultat nije promijenio. 3 boda

Analogno se pokazuje da se rezultat ne mijenja ako dvije karte u Martinom setu zamijene mjesta. 1 bod

To zapravo znači da rezultat ne ovisi o poretku karata, jer se svaki poredak karata može dobiti uzastopnim zamjenama dviju karata. 2 boda

Stoga rezultat možemo izračunati tako da pretpostavimo neki raspored karata. 1 bod

Odabrat ćemo najjednostavniji mogući: poredak karata u Ivičinom setu karata isti je kao poredak karata u Martinom setu. U tom slučaju između svake dvije identične karte nalazi se točno 49 karata, pa je traženi rezultat $49 \cdot 50 = 2450$. 2 boda

Drugo rješenje.

Neka se svaki set sastoji od karata $S_1, \ldots, S_{50}$. Neka su a_i, b_i pozicije karte S_i u Ivičinom odnosno Martinom setu karata nakon miješanja ($1 \leqslant a_i, b_i \leqslant 50$, $\forall i = \{1, \ldots, 50\}$). 1 bod

Kada se karte stave jedne na druge, između dviju karata S_i bit će

$$(b_i + 50) - a_i - 1 \qquad \text{karata,}$$ 1 bod

jer je jedna od njih na poziciji a_i u donjem setu, a druga na poziciji b_i u gornjem. 1 bod

Stoga je traženi rezultat jednak

$$(b_1 + 50 - a_1 - 1) + (b_2 + 50 - a_2 - 1) + \ldots + (b_{50} + 50 - a_{50} - 1) =$$ 1 bod

$$= (b_1 + b_2 + \ldots + b_{50}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{50}) + 50 \cdot 50 - 50 \cdot 1$$ 3 boda

Svaka zagrada sadrži zbroj svih brojeva od 1 do 50, pa je rezultat 2 boda

$$= 50 \cdot 50 - 50 = 2450.$$ 1 bod

Napomena: Učenik koji računa zbroj *udaljenosti* između parova identičnih karata dobit će rezultat 2500. U tom slučaju učeniku treba oduzeti 1 bod.

Napomena: Označavanje karata pri kojem je p_i redni broj karte na i-toj poziciji ne vodi rješenju pa za uvođenje takvih oznaka ne treba dati bodove.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

17. siječnja 2013.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Koji broj ima više djelitelja u skupu prirodnih brojeva, 2013^2 ili 20480 ?

Rješenje.

Rastav broja 2013 na proste faktore je $3 \cdot 11 \cdot 61$ — 1 bod

pa su djelitelji broja $2013^2 = 3^2 \cdot 11^2 \cdot 61^2$ oblika $3^a \cdot 11^b \cdot 61^c$ pri čemu su $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$.
Takvih brojeva ima $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. — 2 boda

Rastav broja 20480 na proste faktore je $20480 = 2^{12} \cdot 5$. Njegovi djelitelji su brojevi — 1 bod
oblika 2^k i $2^k \cdot 5$ za $k = 0, 1, \ldots, 12$. Takvih je brojeva ukupno $2 \cdot 13 = 26$. — 1 bod

Broj 2013^2 ima više djelitelja. — 1 bod

Zadatak A-2.2.

Odredi kompleksni broj z takav da je

$$\operatorname{Re} \frac{1}{1-z} = 2 \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im} \frac{1}{1-z} = -1.$$

Prvo rješenje.

Dane uvjete možemo zapisati jednom jednadžbom

$$\frac{1}{1-z} = 2 - i, \qquad \text{2 boda}$$

odakle dalje slijedi

$$1 - z = \frac{1}{2-i} \qquad \text{1 bod}$$

$$1 - z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \qquad \text{2 boda}$$

$$z = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i. \qquad \text{1 bod}$$

Drugo rješenje.

Stavimo $z = a + bi$. Tada je

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1-a-bi} = \frac{1}{(1-a)-bi} \\ &= \frac{1}{(1-a)-bi} \cdot \frac{(1-a)+bi}{(1-a)+bi} = \frac{(1-a)+bi}{(1-a)^2+b^2} \\ &= \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} + i \cdot \frac{b}{(1-a)^2+b^2}.\end{aligned}$$

2 boda

Riješimo sustav

$$\frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} = 2, \qquad \frac{b}{(1-a)^2+b^2} = -1.$$

Iz jednakosti

$$(1-a)^2 + b^2 = \frac{1}{2}(1-a) = -b$$

zaključujemo da je $1 - a = -2b$ pa je 1 bod

$$(-2b)^2 + b^2 = -b$$

odakle dobivamo $b = 0$ ili $b = -\dfrac{1}{5}$. 1 bod

Za $b = 0$ dobijemo $a = 1$, $z = 1$, no to očito nije rješenje. 1 bod

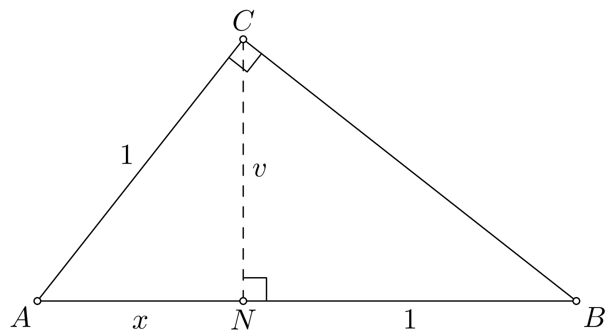
Iz $b = -\dfrac{1}{5}$ slijedi $a = \dfrac{3}{5}$ i $z = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}i$. 1 bod

Zadatak A-2.3.

Neka je ABC pravokutan trokut i $\overline{CN}$ njegova visina. Ako je $|AC| = |BN| = 1$, kolika je duljina hipotenuze $\overline{AB}$?

Prvo rješenje.

Neka je $|AN| = x$ i $|CN| = v$.



Prema Euklidovom poučku, vrijedi $|AN| \cdot |NB| = |NC|^2$ odnosno $x \cdot 1 = v^2$. 1 bod

Prema Pitagorinom poučku, vrijedi $|CN|^2 = |AC|^2 - |AN|^2$ tj. $v^2 = 1 - x^2$. 1 bod

Slijedi $x = 1 - x^2$ odnosno $x^2 + x - 1 = 0$. 1 bod

Rješenje ove jednadžbe je $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (drugo rješenje je negativno), 2 boda

pa je duljina hipotenuze $|AB| = |AN| + |NB| = x + 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $|AN| = x$.

Po Pitagorinom poučku vrijedi

$$\begin{aligned} |CN|^2 &= |AC|^2 - |AN|^2 = 1 - x^2, && \text{1 bod} \\ |BC|^2 &= |CN|^2 + |BN|^2 = (1 - x^2) + 1^2 = 2 - x^2, \\ |AB|^2 &= |AC|^2 + |BC|^2 = 1^2 + (2 - x^2) = 3 - x^2. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Kako je $|AB| = |AN| + |NB| = x + 1$ dobivamo jednadžbu $(x+1)^2 = 3 - x^2$ 1 bod

odnosno $x^2 + x - 1 = 0$, čije je jedino pozitivno rješenje $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 2 boda

Konačno, duljina hipotenuze je $c = x + 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 1 bod

Napomena: Bez uvođenja nepoznanice x na isti način može se dobiti jednadžba za duljinu hipotenuze, $c^2 - c - 1 = 0$.

Zadatak A-2.4.

Dokaži da zbroj svih troznamenkastih brojeva čiji se dekadski zapis sastoji od tri različite znamenke različite od nula ima barem tri različita prosta djelitelja.

Rješenje.

Neka je $\overline{abc}$ jedan takav broj.

Tada su i brojevi $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$ među brojevima koje zbrajamo. 1 bod

Njihov zbroj je

$$\begin{aligned} \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} &= (100a + 10b + c) + \ldots + (100c + 10b + a) \\ &= 222a + 222b + 222c = 222(a+b+c). && \text{3 boda} \end{aligned}$$

Zato je i suma svih takvih brojeva djeljiva s 222, 1 bod

a to znači da je djeljiva s 2, 3 i 37. 1 bod

Zadatak A-2.5.

U koordinatnom sustavu označene su sve cjelobrojne točke (x, y) pri čemu je $1 \leqslant x \leqslant 200$ i $1 \leqslant y \leqslant 100$, ukupno 20000 točaka. Koliko ima dužina duljine $\sqrt{5}$ čiji su krajevi označene točke?

Prvo rješenje.

Dužina duljine $\sqrt{5}$ je dijagonala točno jednog pravokutnika 2×1 ili 1×2 s vrhovima na toj mreži točaka. 1 bod

Pravokutnik 2×1 (horizontalni) možemo u bilo koji od 99 redaka postaviti na 198 mjesta. 1 bod

Pravokutnik 1×2 (vertikalni) možemo postaviti u bilo koji od 199 stupaca na 98 mjesta. 1 bod

Ukupan broj njihovih dijagonala (tj. traženih dužina duljine $\sqrt{5}$) je

$$2(99 \cdot 198 + 199 \cdot 98) = 78208.$$ 3 boda

Drugo rješenje.

Najprije ćemo odrediti koliko dužina možemo povući iz pojedine točke (ovisno koliko je blizu rubu) i koliko takvih točaka ima.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\star & \square & \triangle & \triangle & \triangle & & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \star \\
\square & \times & \lozenge & \lozenge & \lozenge & & \lozenge & \lozenge & \lozenge & \times & \square \\
\triangle & \lozenge & \odot & \odot & \odot & \cdots & \odot & \odot & \odot & \lozenge & \triangle \\
\triangle & \lozenge & \odot & \odot & \odot & & \odot & \odot & \odot & \lozenge & \triangle \\
 & & \vdots & & & \ddots & & & \vdots & & \\
\triangle & \lozenge & \odot & \odot & \odot & & \odot & \odot & \odot & \lozenge & \triangle \\
\triangle & \lozenge & \odot & \odot & \odot & \cdots & \odot & \odot & \odot & \lozenge & \triangle \\
\square & \times & \lozenge & \lozenge & \lozenge & & \lozenge & \lozenge & \lozenge & \times & \square \\
\star & \square & \triangle & \triangle & \triangle & & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \star
\end{array}$$

Iz četiri točke $\star$ u samim kutovima mogu se povući po dvije dužine duljine $\sqrt{5}$.

Iz osam točaka označenih sa $\square$ moguće je povući po tri takve dužine, 1 bod

a iz svake od četiri točke $\times$ po četiri takve dužine. 1 bod

Iz ostalih točaka na rubu, označenih sa $\triangle$, možemo povući po četiri dužine duljine $\sqrt{5}$. Takvih točaka ima $2 \cdot 196 + 2 \cdot 96 = 584$.

Iz točaka označenih sa $\lozenge$, u retku ili stupcu do ruba, možemo povući po šest takvih dužina. Takvih točaka ima također $2 \cdot 196 + 2 \cdot 96 = 584$. 1 bod

Svaka unutrašnja točka $\odot$ kraj je za osam dužina duljine $\sqrt{5}$.
Takvih točaka ima $196 \cdot 96 = 18816$. 1 bod

Kada sve to zbrojimo dobit ćemo dvostruki broj dužina duljine $\sqrt{5}$ jer svaka dužina ima dva kraja. 1 bod

Stoga je konačni rezultat

$$\frac{1}{2}(4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 584 \cdot 4 + 584 \cdot 6 + 18816 \cdot 8) = 78208.$$ 1 bod

Zadatak A-2.6.

Neka je $0 < a < b < c < d$ i neka svaka od kvadratnih funkcija $p(x) = x^2 + dx + a$ i $q(x) = x^2 + cx + b$ ima dvije različite realne nultočke. Dokaži da su sve četiri nultočke međusobno različite.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, da nisu sve četiri nultočke međusobno različite. S obzirom da svaka funkcija ima dvije različite nultočke, to znači da promatrane kvadratne funkcije imaju jednu zajedničku nultočku. 1 bod
(Ne mogu imati dvije zajedničke nultočke, jer bi se tada funkcije p i q podudarale.)

Označimo tu zajedničku nultočku s x_0. Tada je

$$x_0^2 + dx_0 + a = 0 \quad \text{i} \quad x_0^2 + cx_0 + b = 0.$$ 1 bod

Oduzimanjem ovih jednakosti dobivamo

$$dx_0 + a = cx_0 + b$$ 1 bod

odakle je

$$x_0 = \frac{b-a}{d-c}.$$ 1 bod

Zbog danih uvjeta je $b - a > 0$ i $d - c > 0$ pa je i $x_0 > 0$. 2 boda

No, funkcije p i q ne mogu imati pozitivnu realnu nultočku jer su im svi koeficijenti pozitivni. 2 boda

Time smo dobili kontradikciju. Stoga je pretpostavka pogrešna što znači da su sve četiri nultočke međusobno različite. 2 boda

Drugo rješenje.

Skicirajmo grafove danih funkcija u koordinatnom sustavu. Ti grafovi su sukladne parabole, jer su obje translacije parabole $y = x^2$.

Kako su vrijednosti danih funkcija za sve $x > 0$ pozitivne, njihove nultočke su negativni realni brojevi pa obje parabole sijeku negativni dio osi x u dvjema točkama. 2 boda

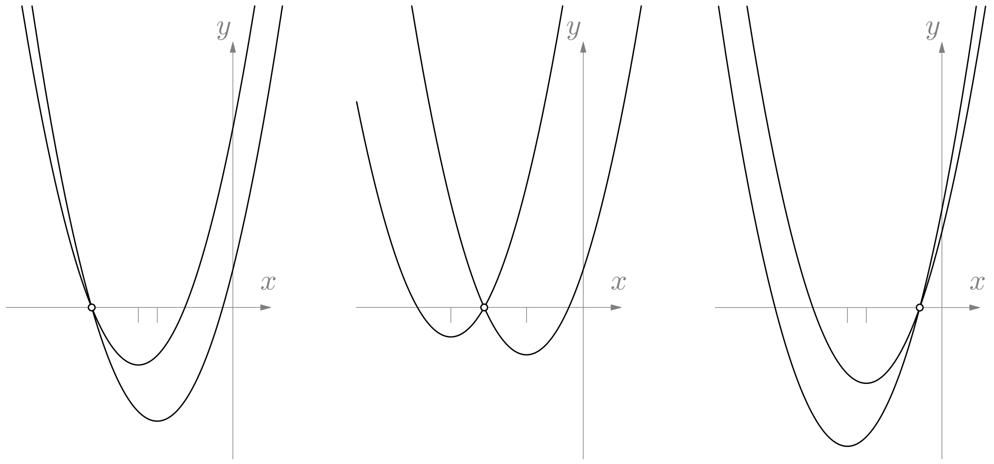
Parabola $y = x^2 + dx + a$ siječe os y u točki $(0, a)$, a parabola $y = x^2 + cx + b$ u točki $(0, b)$. Kako je $a < b$, prvo sjecište je ispod drugoga. 1 bod

Apscisa tjemena parabole $y = x^2 + dx + a$ je $-\frac{d}{2}$, a apscisa tjemena parabole $y = x^2 + cx + b$ je $-\frac{c}{2}$. Kako je $d > c$, vrijedi $-\frac{d}{2} < -\frac{c}{2}$ pa se tjeme prve parabole nalazi lijevo od tjemena druge. 1 bod

Zaključujemo da parabola čije je tjeme lijevo mora sjeći os y u nižoj točki. $(*)$ 2 boda

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, da nisu sve četiri nultočke međusobno različite. To znači da promatrane kvadratne funkcije imaju jednu zajedničku nultočku. 1 bod

Moguća su tri slučaja, ovisno o tome koja je nultočka zajednička.



1 bod

U prvom slučaju zajednička nultočka je manja nultočka obje funkcije. U drugom slučaju zajednička nultočka je veća nultočka jedne i manja nultočka druge funkcije. U trećem slučaju zajednička nultočka je veća nultočka obje funkcije.

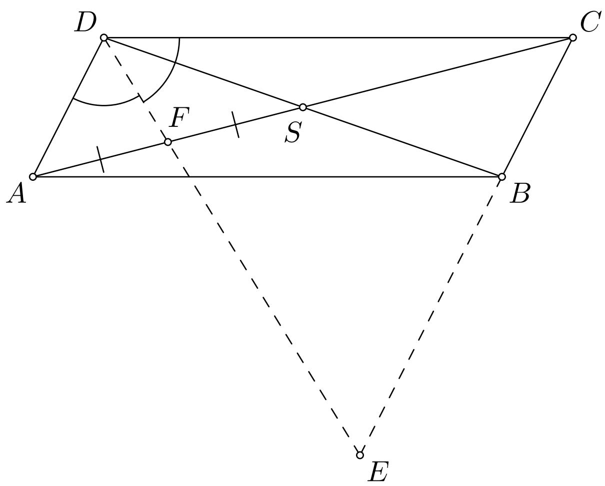
Promatrajući skice vidimo da ni u jednom slučaju ne može biti ispunjeno $(*)$.
Stoga je pretpostavka pogrešna. Sve četiri nultočke su međusobno različite. 2 boda

Zadatak A-2.7.

Neka je $ABCD$ paralelogram i neka je S sjecište njegovih dijagonala. Simetrala kuta $\sphericalangle ADC$ raspolavlja dužinu $\overline{AS}$ i siječe pravac BC u točki E. Odredi omjere $|BE| : |BC|$ i $|AB| : |BC|$.

Rješenje.

Neka pravac DE siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki F.



Dijagonale paralelograma se raspolavljaju pa je točka S polovište od $\overline{AC}$. Kako je točka F polovište od $\overline{AS}$, vrijedi $|AF| : |FC| = 1 : 3$. 1 bod

Kutovi $\sphericalangle ADE$ i $\sphericalangle DEC$ su sukladni (kutovi uz presječnicu DE paralelnih pravaca AD i CE), kao i kutovi $\sphericalangle AFD$ i $\sphericalangle CFE$ (vršni kutovi)

pa su trokuti ADF i CEF slični. 1 bod

To znači da je $|AD| : |CE| = |AF| : |FC|$ i sada slijedi $|CE| = 3|AD|$. 1 bod

Kako je $ABCD$ paralelogram, vrijedi $|AD| = |BC|$ pa je $|BE| = |EC| - |BC| = 3|BC| - |BC| = 2|BC|$, a traženi omjer $|BE| : |BC| = 2 : 1$. 3 boda

Također, iz $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DEC$, koristeći činjenicu da je DE simetrala kuta $\sphericalangle ADC$, tj. da je $\sphericalangle ADE = \sphericalangle EDC$, zaključujemo da je $\sphericalangle EDC = \sphericalangle DEC$ 1 bod

pa je trokut DCE jednakokračan i vrijedi $|CD| = |CE|$. 1 bod

Kako je $|AB| = |CD|$, a $|CE| = 3|AD| = 3|BC|$, vidimo da je $|AB| = 3|BC|$, 2 boda
tj. $|AB| : |BC| = 3 : 1$.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

17. siječnja 2013.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Ako je $60^a = 3$, $60^b = 5$ i $x = \dfrac{1-a-b}{2(1-b)}$, dokaži da je 12^x prirodan broj.

Rješenje.

Vrijedi $a = \log_{60} 3$ i $b = \log_{60} 5$. Zato je 1 bod

$$
\begin{aligned}
x = \frac{1-a-b}{2(1-b)} &= \frac{1-\log_{60} 3 - \log_{60} 5}{2(1-\log_{60} 5)} && \text{1 bod}\\
&= \frac{\log_{60} \frac{60}{3\cdot 5}}{2\log_{60} \frac{60}{5}} && \text{1 bod}\\
&= \frac{\log_{60} 4}{2\log_{60} 12} = \frac{2\log_{60} 2}{2\log_{60} 12}\\
&= \frac{\log_{60} 2}{\log_{60} 12} = \log_{12} 2. && \text{2 boda}
\end{aligned}
$$

Konačno, $12^x = 12^{\log_{12} 2} = 2$. 1 bod

Zadatak A-3.2.

Ako je $(1+\sin t)(1+\cos t) = \dfrac{5}{4}$, odredi $\sin t + \cos t$.

Rješenje.

Označimo $a = \sin t + \cos t$. Tada je $a^2 = 1 + 2\sin t \cos t$. 1 bod

Raspisivanjem dane jednakosti dobivamo

$$
\begin{aligned}
1 + (\sin t + \cos t) + \sin t \cos t &= \frac{5}{4},\\
1 + a + \frac{1}{2}\left(a^2 - 1\right) &= \frac{5}{4}. && \text{2 boda}
\end{aligned}
$$

Odavde sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu $2a^2 + 4a - 3 = 0$

čija su rješenja

$$
a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 2} = \frac{-2\pm\sqrt{10}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}. \qquad \text{2 boda}
$$

Kako je $-1-\frac{\sqrt{10}}{2} \approx -2.58$ manje od -2, a $\sin t+\cos t$ poprima vrijednosti iz intervala $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, ovo rješenje treba odbaciti. 1 bod

Zato je jedino rješenje $a=-1+\dfrac{\sqrt{10}}{2} \approx 0.58$.

Zadatak A-3.3.

Koliko uređenih parova prirodnih brojeva (m, n) zadovoljava jednadžbu $m^2-n^2=2^{2013}$?

Rješenje.

Danu jednadžbu možemo napisati u obliku $(m+n)(m-n)=2^{2013}$. 1 bod

Promotrimo sustav

$$\left\{\begin{array}{l} m+n=a \\ m-n=b \end{array}\right.$$

gdje su a i b prirodni brojevi.

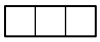
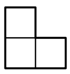
Da bi m i n bili prirodni, a i b moraju biti iste parnosti i očito mora biti $a>b$. Uz te uvjete sustav ima jedinstveno rješenje. 2 boda

Polazna jednadžba ekvivalentna je nizu sustava:

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} m+n & = & 2^{2012} & 2^{2011} & 2^{2010} & \ldots & 2^{1008} & 2^{1007} \\ m-n & = & 2 & 2^2 & 2^3 & \ldots & 2^{1005} & 2^{1006}. \end{array}\right.$$ 2 boda

Svaki od tih sustava ima jedno rješenje pa polaznu jednadžbu zadovoljava ukupno 1006 uređenih parova prirodnih brojeva. 1 bod

Zadatak A-3.4.

S kvadratne ploče $n \times n$ $(n>5)$ uklonjena su dva disjunktna kvadrata 2×2. Može li se tako nastala ploča prekriti pločicama oblika  i  bez preklapanja?

Rješenje.

Nastala ploča ima $n \cdot n-2 \cdot 4=n^2-8$ polja. 1 bod

Provjerit ćemo kada je taj broj djeljiv s 3.

Ako je n djeljiv s 3, onda očito n^2-8 nije djeljivo s 3. 1 bod

Ako n nije djeljiv s 3, lako se vidi da je n^2 oblika $3k+1$, tj. daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3. Tada n^2-8 pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2. 3 boda

Broj n^2-8 nije djeljiv s 3 ni za koji $n \in \mathbb{N}$ pa se takva ploča ne može prekriti pločicama koje prekrivaju po tri polja. 1 bod

Napomena: Ako učenik promatra djeljivost s 3, ali ne dođe do nekog zaključka, treba mu dati 1 bod.

Zadatak A-3.5.

Dano je 27 točaka, raspoređenih u 9 stupaca i 3 retka. Svaka točka je obojana crveno ili plavo. Dokaži da postoji pravokutnik kojem su svi vrhovi iste boje.

Rješenje.

Najprije uočimo da postoji osam načina da dvjema bojama obojimo tri točke u jednom stupcu. 1 bod

To znači da može postojati najviše osam različitih stupaca. Kako ukupno imamo devet stupaca, među njima (po Dirichletovom principu) moraju postojati dva jednaka. 2 boda

Promatrajmo sada samo ta dva stupca.

Ako su stupci jednobojni, onda je svih 6 točaka iste boje i tada očito postoji traženi pravokutnik. 1 bod

Ako stupci nisu jednobojni, onda su dva retka jedne boje, a treći redak druge boje. Pronašli smo četiri polja iste boje raspoređena u dva retka i dva stupca i te su točke vrhovi traženog pravokutnika. 2 boda

Zadatak A-3.6.

Izračunaj umnožak

$$\left(1-\frac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right)\left(1-\frac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\right)\ldots\left(1-\frac{\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}\right).$$

Rješenje.

Uočavamo da su svi faktori istog oblika pa najprije računamo

$$\begin{aligned}
1-\frac{\cos(60^\circ+k^\circ)}{\cos k^\circ} &= \frac{\cos k^\circ-\cos(60^\circ+k^\circ)}{\cos k^\circ} && \text{1 bod}\\
&= \frac{2\sin 30^\circ \sin(30^\circ+k^\circ)}{\cos k^\circ} && \text{2 boda}\\
&= \frac{\sin(30^\circ+k^\circ)}{\cos k^\circ} && \text{1 bod}\\
&= \frac{\cos(90^\circ-30^\circ-k^\circ)}{\cos k^\circ} && \text{2 boda}\\
&= \frac{\cos(60^\circ-k^\circ)}{\cos k^\circ}. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\prod_{k=1}^{59}\left(1-\frac{\cos(60^\circ+k^\circ)}{\cos k^\circ}\right)=\frac{\cos 59^\circ}{\cos 1^\circ}\cdot\frac{\cos 58^\circ}{\cos 2^\circ}\cdot\ldots\cdot\frac{\cos 1^\circ}{\cos 59^\circ}=1. \qquad \text{3 boda}$$

Napomena: Učenik koji postupak analogan prvom dijelu rješenja provede samo za neku konkretnu vrijednost k treba dobiti 5 bodova.

Zadatak A-3.7.

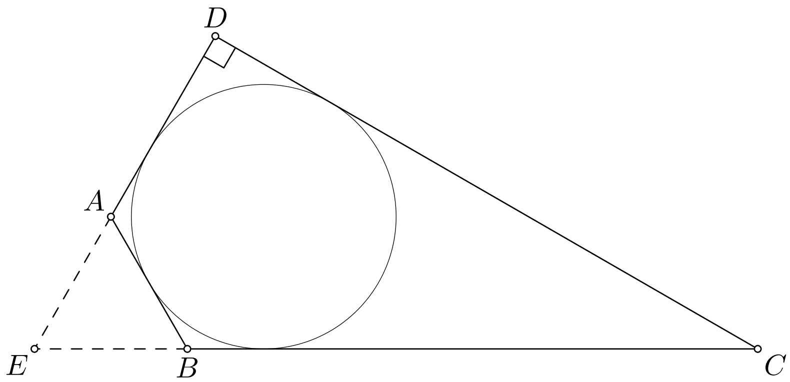
Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut u kojem je $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 120°$ i $\sphericalangle CDA = 90°$. Ako je $|AB| = 1$, izračunaj opseg četverokuta $ABCD$.

Prvo rješenje.

Četvrti kut danog četverokuta je $\sphericalangle BCD = 30°$. 1 bod

Označimo sa E sjecište pravaca BC i DA. 1 bod

Neka je $|DE| = x$.



Mjere kutova $\sphericalangle ABE$ i $\sphericalangle BAE$ iznose $60°$ pa je trokut ABE jednakostraničan, te je $|AE| = |BE| = |AB| = 1$. 1 bod

Trokut CDE je pravokutan, sa šiljastim kutovima $\sphericalangle DCE = 30°$ i $\sphericalangle CED = 60°$. Stoga je $|CE| = 2x$ i $|CD| = x\sqrt{3}$. 1 bod

Odredimo sada duljine svih stranica četverokuta $ABCD$:

$$|AB| = 1, \quad |BC| = 2x - 1, \quad |CD| = x\sqrt{3}, \quad |DA| = x - 1.$$ 1 bod

Kako je četverokut $ABCD$ tangencijalan, vrijedi $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$, tj. 1 bod

$$1 + x\sqrt{3} = (2x - 1) + (x - 1),$$ 1 bod

$$\left(3 - \sqrt{3}\right) x = 3$$

pa je $x = \dfrac{3}{3 - \sqrt{3}} = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$. 1 bod

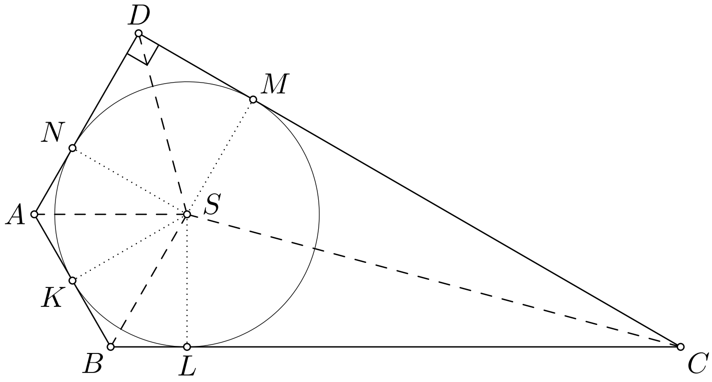
Opseg četverokuta $ABCD$ je

$$\begin{aligned} |AB| + |BC| + |CD| + |DA| &= 1 + (2x - 1) + x\sqrt{3} + (x - 1) \\ &= \left(3 + \sqrt{3}\right) x - 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right)^2 - 1 \\ &= 5 + 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

(1 bod uz drugi redak; 1 bod uz posljednji redak)

Drugo rješenje.

Neka je S središte upisane kružnice i neka su K, L, M, N dirališta te kružnice sa stranicama (v. sliku).



Pravci AS, BS, CS i DS su simetrale kutova, dok su SK, SL, SM i SN okomiti na odgovarajuće stranice. 1 bod

Lako se uočavaju parovi sukladnih pravokutnih trokuta: $SKB \cong SLB$, $SLC \cong SMC$, $SMD \cong SND$ i $SNA \cong SKA$. 1 bod

Zato je $|BL| = |BK|$, $|AK| = |AN|$, $|CL| = |CM|$ i $|DM| = |DN|$, 1 bod

a opseg četverokuta $ABCD$ iznosi

$$2|AK| + 2|BK| + 2|DN| + 2|CL| = 2(|AB| + |DN| + |CL|) = 2(1 + |DN| + |CL|).$$ 1 bod

Označimo polumjer upisane kružnice s r.

Četverokut $SMDN$ je kvadrat jer ima tri prava kuta i dvije susjedne sukladne stranice, pa je $|DN| = r$. 1 bod

Iz trokuta SLC s kutom $\sphericalangle SCL = 15°$ dobivamo $|CL| = r \operatorname{ctg} 15°$. 1 bod

Dakle, traženi opseg je $2(1 + r + r \operatorname{ctg} 15°) = 2 + 2r(1 + \operatorname{ctg} 15°)$.

Iz jednakostraničnog trokuta ABS čija je visina $\overline{SK}$ polumjer upisane kružnice, dobivamo $r = |SK| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 1 bod

Vrijedi $\operatorname{ctg} 15° = 2 + \sqrt{3}$. 1 bod

Konačno, opseg četverokuta $ABCD$ je

$$2 + 2r\left(1 + \operatorname{ctg} 15°\right) = 2 + \sqrt{3}\left(1 + 2 + \sqrt{3}\right) = 5 + 3\sqrt{3}.$$ 2 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

17. siječnja 2013.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve proste brojeve p i q takve da je $p^q + 1$ također prost.

Rješenje.

Neka su p i q prosti brojevi i neka je $p^q + 1$ prost. Kako je $p, q \geqslant 2$, vrijedi $p^q + 1 \geqslant p^2 + 1 > p$. Stoga je $p^q + 1$ neparni prost broj, a to je moguće samo ako je $p = 2$. 2 boda

Ako je $q = 2$ onda je $p^q + 1 = 2^2 + 1 = 5$ prost broj, pa je to jedno rješenje. 1 bod

Inače je q neparan broj, a tada je

$$p^q + 1 = (p+1)\left(p^{q-1} - p^{q-2} + \ldots - p + 1\right)$$

složen broj, što je suprotno pretpostavci. 3 boda

Zadatak A-4.2.

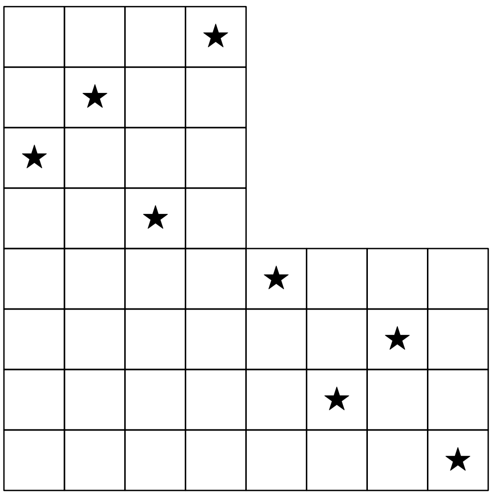
Gornja desna četvrtina šahovske ploče (dimenzija 8×8) je prekrivena papirom. Koliko najviše topova možemo postaviti na preostali dio šahovske ploče tako da se međusobno ne napadaju? Na koliko načina se to može napraviti?

(Dva topa se međusobno napadaju ako se nalaze u istom retku ili u istom stupcu.)

Rješenje.

Očito nije moguće staviti više od 8 topova jer u svakom retku može biti najviše jedan. 1 bod

Primjer na slici pokazuje da je osam topova moguće rasporediti na traženi način.



1 bod

Razmotrimo na koje sve načine je to moguće napraviti.

Jasno je da u donjoj polovini ploče ne može biti više od četiri topa, pa u gornjem dijelu ploče, dakle u gornjem lijevom dijelu ploče moraju biti četiri topa, svaki u svom retku i stupcu.
U donjoj lijevoj četvrtini ploče ne može biti nijedan top, jer su svi ti stupci već zauzeti, pa su još četiri topa u donjoj desnoj četvrtini. 2 boda

Četiri topa na ploču 4×4 možemo rasporediti na $4! = 24$ načina. 1 bod
Naime, u prvom retku top može biti na bilo kojem od četiri mjesta. U drugom retku top ne može biti u istom stupcu kao prvi top, pa postoje tri mogućnosti. U trećem retku su samo još dva nenapadnuta polja i konačno u četvrtom retku ostalo je samo jedno moguće polje.

Stoga je ukupan broj mogućih rasporeda $24^2 = 576$. 1 bod

Zadatak A-4.3.

Koliko ima kompleksnih brojeva z koji zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:

$$|z| = 1, \qquad \mathrm{Re}(z^{100}) = \mathrm{Im}(z^{200}) \qquad ?$$

Prvo rješenje.

Zbog prvog uvjeta traženi brojevi su oblika $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$,
a tada drugi uvjet postaje $\cos(100\varphi) = \sin(200\varphi)$. 1 bod

Svako rješenje te jednadžbe na intervalu $[0, 2\pi\rangle$ odgovara jednom kompleksnom broju koji zadovoljava uvjet zadatka.

Dobivenu jednadžbu možemo pisati u obliku

$$\cos(100\varphi) = 2\sin(100\varphi)\cos(100\varphi).$$ 1 bod

Odatle slijedi da je

$$\cos(100\varphi) = 0 \qquad \text{ili} \qquad \sin(100\varphi) = \frac{1}{2}.$$ 1 bod

Svaka od tih jednadžbi ima 200 rješenja u intervalu $[0, 2\pi\rangle$, 1 bod

i ta su rješenja očito međusobno različita. 1 bod

Stoga postoji ukupno 400 kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju dane uvjete. 1 bod

Drugo rješenje.

Zbog prvog uvjeta traženi brojevi su oblika $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$,
a tada drugi uvjet postaje $\cos(100\varphi) = \sin(200\varphi)$. 1 bod

Svako rješenje te jednadžbe na intervalu $[0, 2\pi\rangle$ odgovara jednom kompleksnom broju koji zadovoljava uvjet zadatka.

Dobivenu jednadžbu možemo pisati u obliku

$$\cos(100\varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 200\varphi\right)$$ 1 bod

odakle slijedi

$$100\varphi = \frac{\pi}{2} - 200\varphi + 2k\pi \quad \text{ili} \quad -100\varphi = \frac{\pi}{2} - 200\varphi + 2k\pi, \quad \text{za } k \in \mathbb{Z}.$$ 1 bod

Dakle $300\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ili $100\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Prva jednadžba ima 300 rješenja u intervalu $[0, 2\pi\rangle$, a druga 100, 1 bod

i sva su ta rješenja međusobno različita. 1 bod

Stoga postoji ukupno 400 kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju dane uvjete. 1 bod

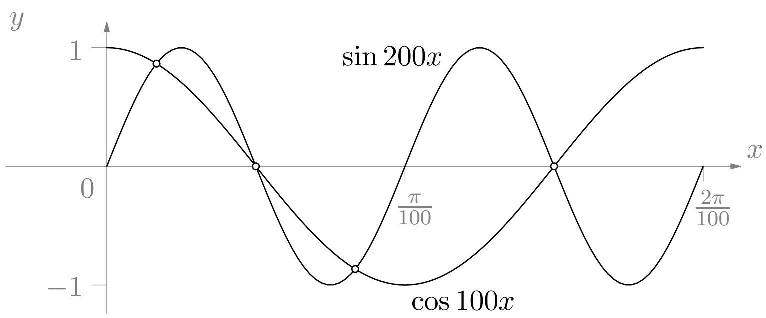
Treće rješenje.

Zbog prvog uvjeta traženi brojevi su oblika $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$,
a tada drugi uvjet postaje

$$\cos(100\varphi) = \sin(200\varphi). \qquad (*)$$ 1 bod

Svako rješenje te jednadžbe na intervalu $[0, 2\pi\rangle$ odgovara jednom kompleksnom broju koji zadovoljava uvjet zadatka.

Skicirajmo grafove $y = \sin 200x$ i $y = \cos 100x$. Zbog periodičnosti, dovoljno ih je skicirati na intervalu $\left[0, \frac{2\pi}{100}\right\rangle$.



2 boda

Lako se vidi da se na tom intervalu grafovi sijeku u četiri točke. 1 bod

Isto se ponavlja ukupno 100 puta na intervalu $[0, 2\pi\rangle$ 1 bod

pa jednadžba $(*)$ ima 400 rješenja, odnosno 400 kompleksnih brojeva zadovoljava dane uvjete. 1 bod

Zadatak A-4.4.

Igrači A, B i C bacaju kockicu jedan za drugim. Kolika je vjerojatnost da C dobije veći broj nego ostala dva igrača?

Rješenje.

Neka je $\mathcal{D}$ događaj "igrač C dobio je veći broj nego druga dva igrača", i neka je p_k vjerojatnost događaja $\mathcal{D}$ uz uvjet da je igrač C dobio broj k (za $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Ako igrač C dobije broj k, onda je njegov broj najveći ako igrači A i B dobiju brojeve manje od k, dakle neki od brojeva $\{1, \dots, k-1\}$.

Ta vjerojatnost iznosi $p_k = \dfrac{(k-1)^2}{36}$. 4 boda

Konačno, tražena vjerojatnost iznosi

$$\frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{6}p_3 + \frac{1}{6}p_4 + \frac{1}{6}p_5 + \frac{1}{6}p_6$$ 1 bod

pa uvrštavanjem dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) &= \frac{1}{6}\left(\frac{0}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{9}{36} + \frac{16}{36} + \frac{25}{36}\right) \\ &= \frac{0+1+4+9+16+25}{6 \cdot 36} = \frac{55}{216}. \end{aligned}$$ 1 bod

Napomena: Učenik koji odredi samo neke od vjerojatnosti p_k treba dobiti:
3 boda ako je odredio sve osim jedne vjerojatnosti;
2 boda ako je odredio barem dvije vjerojatnosti i pritom barem jednu od p_3, p_4, p_5;
1 bod ako je odredio barem jednu od vjerojatnosti p_3, p_4, p_5 ili obje p_2 i p_6.

Zadatak A-4.5.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi

$$2^n \cdot (n!)^2 < (2n)!.$$

Rješenje.

Uvrstimo $n = 1$. Lijeva strana je $2^1 \cdot (1!)^2 = 2$, a desna $(2 \cdot 1)! = 2$ pa $n = 1$ ne zadovoljava tu nejednakost. 1 bod

Uvrstimo $n = 2$. Lijeva strana je $2^2 \cdot (2!)^2 = 4 \cdot 4 = 16$, a desna $(2 \cdot 2)! = 4! = 24$. Kako je $16 < 24$, broj $n = 2$ zadovoljava danu nejednakost. 1 bod

Indukcijom ćemo dokazati da nejednakost vrijedi za sve $n \geqslant 2$.

Bazu smo provjerili ($n = 2$).

Pretpostavimo da za neki $n \geqslant 2$ vrijedi $(2n)! > 2^n \cdot (n!)^2$. $(*)$ 1 bod

Tada je $(2(n+1))! = (2n+2)(2n+1) \cdot (2n)! > (2n+2)(2n+1) \cdot 2^n \cdot (n!)^2$.

Dalje je

$$(2n+2)(2n+1) \cdot 2^n \cdot (n!)^2 = 2(n+1)(2n+1) \cdot 2^n \cdot n! \cdot n! = 2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n! \cdot (2n+1).$$

Kako je $2n+1 > n+1$ za sve prirodne n, taj je izraz veći od $2^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2$,

čime smo dokazali da je (uz pretpostavku da za n vrijedi $(*)$)

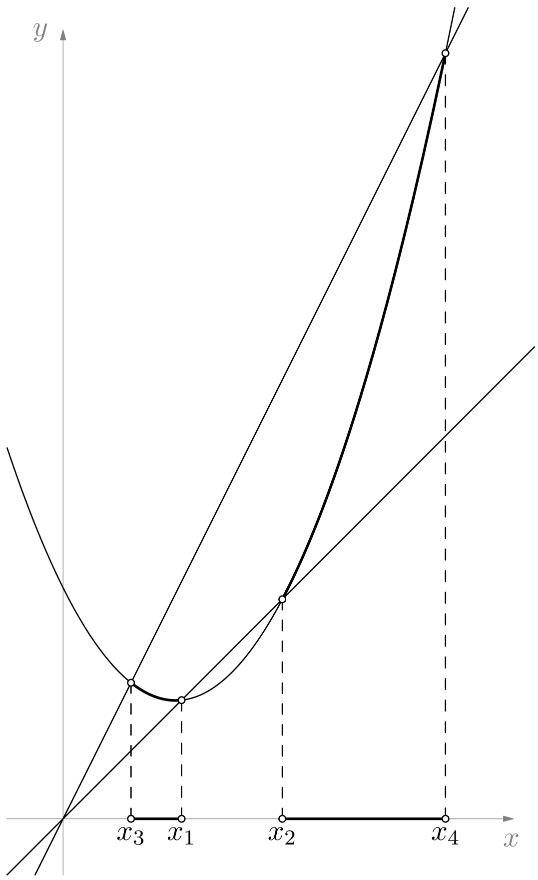
$$(2(n+1))! > 2^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2 \,.$$ 2 boda

Sada po principu matematičke indukcije zaključujemo da dana nejednakost vrijedi za sve prirodne brojeve $n \geqslant 2$. 1 bod

Zadatak A-4.6.

Sva četiri sjecišta parabole $y = x^2 + px + q$ i pravaca $y = x$ i $y = 2x$ nalaze se u prvom kvadrantu. Uočimo dva dijela parabole koja leže između tih pravaca. Dokaži da razlika duljina njihovih ortogonalnih projekcija na os x iznosi 1.

Prvo rješenje.



Apscise (x-koordinate) presjeka pravca $y = x$ i dane parabole su rješenja jednadžbe

$$x^2 + (p-1)x + q = 0.$$ 1 bod

Apscise presjeka pravca $y = 2x$ i dane parabole su rješenja jednadžbe

$$x^2 + (p-2)x + q = 0.$$ 1 bod

Neka su rješenja prve jednadžbe x_1 i x_2 $(0 < x_1 < x_2)$, a rješenja druge jednadžbe x_3 i x_4 $(0 < x_3 < x_4)$.

Duljina ortogonalne projekcije prvog dijela parabole je $x_1 - x_3$, a duljina ortogonalne projekcije drugog dijela $x_4 - x_2$. 2 boda

Razlika njihovih duljina je $|(x_1 - x_3) - (x_4 - x_2)| = |(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)|$. 2 boda

Prema Viéteovim formulama je $x_1 + x_2 = 1 - p$ i $x_3 + x_4 = 2 - p$. 2 boda

Stoga je tražena razlika $|(1 - p) - (2 - p)| = 1$. 2 boda

Drugo rješenje.

Apscise (x-koordinate) presjeka pravca $y = x$ i dane parabole su rješenja jednadžbe

$$x^2 + (p - 1)x + q = 0.$$ 1 bod

To su $x_1 = \dfrac{1 - p - \sqrt{(p-1)^2 - 4q}}{2}$ i $x_2 = \dfrac{1 - p + \sqrt{(p-1)^2 - 4q}}{2}$. 1 bod

Apscise presjeka pravca $y = 2x$ i dane parabole su rješenja jednadžbe

$$x^2 + (p - 2)x + q = 0.$$ 1 bod

To su $x_3 = \dfrac{2 - p - \sqrt{(p-2)^2 - 4q}}{2}$ i $x_4 = \dfrac{2 - p + \sqrt{(p-2)^2 - 4q}}{2}$. 1 bod

Ortogonalna projekcija prvog dijela parabole na os x omeđena je točkama s apscisama x_3 i x_1 pa je njena duljina

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= \frac{1 - p - \sqrt{(p-1)^2 - 4q}}{2} - \frac{2 - p - \sqrt{(p-2)^2 - 4q}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{(p-2)^2 - 4q} - \sqrt{(p-1)^2 - 4q}\right). \end{aligned}$$ 2 boda

Ortogonalna projekcija drugog dijela parabole na os x omeđena je točkama s apscisama x_2 i x_4 pa je njena duljina

$$\begin{aligned} x_4 - x_2 &= \frac{2 - p + \sqrt{(p-2)^2 - 4q}}{2} - \frac{1 - p + \sqrt{(p-1)^2 - 4q}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{(p-2)^2 - 4q} - \sqrt{(p-1)^2 - 4q}\right). \end{aligned}$$ 2 boda

Razlika duljina ortogonalnih projekcija tih dvaju dijelova parabole je

$$\left|\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{(p-2)^2 - 4q} - \sqrt{(p-1)^2 - 4q}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{(p-2)^2 - 4q} - \sqrt{(p-1)^2 - 4q}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}(-1 - 1)\right| = 1.$$ 2 boda

Zadatak A-4.7.

Odredi sve prirodne brojeve n takve da je $\log_2(3^n+7)$ također prirodan broj.

Rješenje.

Neka je dani izraz jednak m. Umjesto $\log_2(3^n+7)=m$ možemo pisati

$$3^n+7=2^m. \qquad (*)$$ 1 bod

Izraz na lijevoj strani ove jednakosti pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1.

Potencije broja 2 daju naizmjenice ostatke 2 i 1 pri dijeljenju s 3. Ostatak pri dijeljenju broja 2^m s 3 je jednak 1 ako i samo ako je broj m paran.

Stoga m mora biti paran broj. 2 boda

Stavimo $m=2m_1$. Tada je $3^n+7=4^{m_1}$.

Broj na desnoj strani ove jednakosti je djeljiv s 4.

Broj 3^n daje naizmjenice ostatke 3 i 1 pri dijeljenju s 4,

a kako tom broju dodajemo 7, zaključujemo da n mora biti paran broj. 2 boda

Neka je $n=2n_1$.

Treba odrediti prirodne brojeve m_1, n_1, tako da vrijedi $3^{2n_1}+7=2^{2m_1}$ odnosno

$$\left(2^{m_1}-3^{n_1}\right)\left(2^{m_1}+3^{n_1}\right)=7.$$ 1 bod

Izraz u prvoj zagradi je manji od izraza u drugoj zagradi.

Izraz u drugoj zagradi je očito pozitivan, pa i izraz u prvoj zagradi mora biti pozitivan.

Kako je 7 prost broj, jedina je mogućnost

$$2^{m_1}-3^{n_1}=1, \qquad 2^{m_1}+3^{n_1}=7.$$ 2 boda

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo $2\cdot 2^{m_1}=8$, pa je $m_1=2$,

a njihovim oduzimanjem $2\cdot 3^{n_1}=6$, pa je $n_1=1$. 1 bod

Rješenje jednadžbe $(*)$ je $m=4$, $n=2$.

Jedini prirodni broj n za koji je dani izraz prirodan broj je $n=2$. 1 bod