

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 4.travnja-6.travnja 2016.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Točan broj je $10 \cdot x + y$, a budući da je znamenka desetica dva puta veća od znamenke jedinica,

vrijedi $x = 2 \cdot a$ i $y = a$. Dakle, traženi broj je oblika $10 \cdot 2 \cdot a + a = 21 \cdot a$.

U pogrešnom broju $10 \cdot y + x$ slijedi da se radi o broju oblika $10 \cdot a + 2 \cdot a = 12 \cdot a$.

Dalje slijedi da je $288 \cdot (21 \cdot a - 12 \cdot a) = 7776$

$$21 \cdot a - 12 \cdot a = 7776 : 288$$

$$9 \cdot a = 27$$

$$a = 3$$

Traženi broj je $21 \cdot a = 21 \cdot 3 = 63$.

Točan umnožak je $63 \cdot 288 = 18\,144$.

Drugi način:

Točan broj je $\overline{xy} = 10 \cdot x + y$, a budući da je znamenka desetica dva puta veća od znamenke

jedinica, vrijedi $x = 2 \cdot y$. Dakle, traženi broj je oblika $10 \cdot 2 \cdot y + y = 21 \cdot y$.

U pogrešnom broju (broju zamijenjenih znamenaka) je $\overline{yx} = 10 \cdot y + x$ pa slijedi da se radi o broju oblika $10 \cdot y + 2 \cdot y = 12 \cdot y$.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $288 \cdot \overline{yx} + 7776 = 288 \cdot \overline{xy}$ odnosno $288 \cdot 12 \cdot y + 7776 = 288 \cdot 21 \cdot y$.

Rješavanjem te jednadžbe redom dobivamo $3456 \cdot y + 7776 = 6048 \cdot y$ odnosno $2592 \cdot y = 7776$ odakle je $y = 3$ odnosno $x = 6$.

Traženi broj je $21 \cdot y = 21 \cdot 3 = 63$.

Točan umnožak je $63 \cdot 288 = 18\,144$.

Treći način:

Parovi dvoznamenkastih brojeva kojima je jedna znamenka dva puta veća od druge su: 12 i 21, 24 i 42, 36 i 63 te 48 i 84. Točan broj je onaj u paru kojemu je znamenka desetica dva puta veća od znamenke jedinica.

Prema uvjetima zadatka vrijedi da je:

$$21 \cdot 288 - 12 \cdot 288 = (21 - 12) \cdot 288 = 9 \cdot 288 = 2\,592,$$

$$42 \cdot 288 - 24 \cdot 288 = (42 - 24) \cdot 288 = 18 \cdot 288 = 5\,184,$$

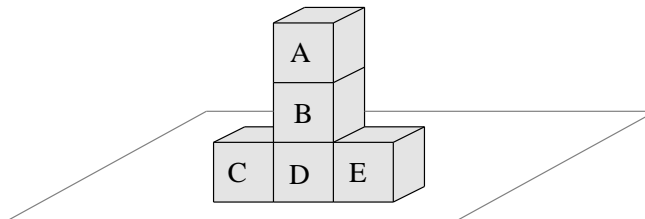
$$63 \cdot 288 - 36 \cdot 288 = (63 - 36) \cdot 288 = 27 \cdot 288 = 7\,776,$$

$$84 \cdot 288 - 48 \cdot 288 = (84 - 48) \cdot 288 = 36 \cdot 288 = 10\,368.$$

Budući da je u trećem slučaju razlika umnožaka jednaka 7 776, traženi broj je 63.

Točan umnožak je $63 \cdot 288 = 18\,144$.

2. Promotrimo sliku:



Kocka A ima 5 slobodnih strana. Zbroj će biti maksimalan kada je strana s brojem 1 nevidljiva (tom stranom je kocka A prislonjena na kocku B) i iznosi $6 + 2 + 5 + 3 + 4 = 20$.

Kocka D ima dvije slobodne strane, a zbroj bilo koje od kombinacije je 7.

Kocke B, C i E imaju po 4 slobodne strane.

Kod kocke B slobodna su dva para nasuprotnih strana pa je maksimalan zbroj $7 + 7 = 14$.

Kod kocaka C i E slobodan je po jedan par nasuprotnih strana i još dvije strane. Maksimalan zbroj će se dobiti ako se vide brojevi 5 i 6, a skrivene su strane na kojima su brojevi 1 i 2 te zbroj tada iznosi $5 + 6 + 7 = 18$.

Maksimalan zbroj je $20 + 7 + 14 + 2 \cdot 18 = 77$.

3. Prvi način:

Promatramo skup prirodnih brojeva manjih od 2016 odnosno skup $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2015\}$.

Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 1007 brojeva djeljivih brojem 2, 671 broj djeljiv brojem 3 i 335 brojeva djeljivih brojem 6 odnosno djeljivih istovremeno brojevima 2 i 3.

Dakle, među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima $1007 + 671 - 335 = 1343$ broja djeljiva brojem 2 ili brojem 3 (moramo oduzeti 335 jer smo brojeve djeljive brojevima 2 i 3 brojali dvaput).

Brojeva koji su djeljivi brojevima 2 i 5 ima 201, brojeva djeljivih brojevima 3 i 5 ima 134, dok brojeva djeljivih brojem 6 (dakle, brojevima 2 i 3) i 5 ima 67.

Slijedi da brojeva koji su djeljivi brojem 2 ili brojem 3, ali i brojem 5, ima $201 + 134 - 67 = 268$ (one koji su djeljivi brojevima 2 i 3 opet smo brojali dvaput pa moramo oduzeti 67).

Konačno, brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 2 ili brojem 3, a nisu djeljivi brojem 5 ima $1343 - 268 = 1075$.

Drugi način:

Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima $2016 : 2 = 1007$ djeljivih brojem 2. Među prirodnim brojevima manjim od 2016 i koji su djeljivi brojem 2, oni koji su djeljivi brojem 5 ujedno su djeljivi brojem 10, a ima ih $2016 : 10 = 201$. Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 2, ali nisu brojem 5 ima $1007 - 201 = 806$.

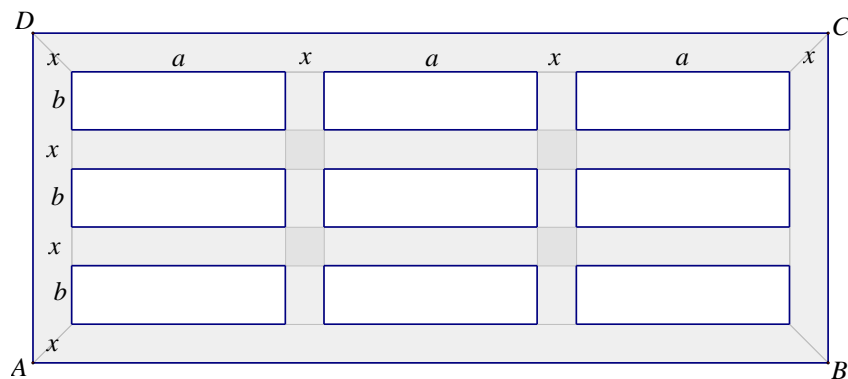
Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima $2016 : 3 = 671$ djeljiv brojem 3. Među prirodnim brojevima manjim od 2016 koji su djeljivi brojem 3, oni koji su djeljivi brojem 5 su ujedno djeljivi brojem 15, a ima ih $2016 : 15 = 134$. Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 3, ali nisu brojem 5 ima $671 - 134 = 537$.

Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima $2016 : 6 = 335$ djeljivih brojevima 2 i 3 (odnosno brojem 6). Među prirodnim brojevima manjim od 2016 koji su djeljivi brojem 6, oni koji su djeljivi brojem 5 su ujedno djeljivi brojem 30, a ima ih $2016 : 30 = 67$. Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 6, ali nisu brojem 5 ima $335 - 67 = 268$.

Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 2 ili brojem 3, a nisu djeljivi brojem 5 ima $806 + 537 - 268 = 1075$. Brojeve djeljive brojevima 2 i 3 smo brojali dvaput pa smo morali oduzeti 268.

4. Prvi način:

Promotrimo sliku i prema uvjetu zadatka označimo odgovarajuće razmake:



Neka su a i b duljine susjednih stranica manjeg pravokutnika, $a > b$, a x širina razmaka. Tada su duljine stranica pravokutnika $ABCD$ jednake $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x$, a površina pravokutnika $ABCD$ jednaka je $|AB| \cdot |BC|$ pa vrijedi jednakost $(3 \cdot a + 4 \cdot x) \cdot (3 \cdot b + 4 \cdot x) = 697$.

Rastavimo li broj 697 na proste faktore, dobit ćemo da je $697 = 41 \cdot 17$. Iz uvjeta $a > b$ slijedi da je $3 \cdot a > 3 \cdot b$ odnosno $3 \cdot a + 4 \cdot x > 3 \cdot b + 4 \cdot x$. Tada je $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x = 41$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x = 17$. U izrazu $3 \cdot b + 4 \cdot x = 17$ pribrojnik $4 \cdot x$ uvijek je paran, a zbroj je neparan pa slijedi da je broj b neparan broj manji od 7 ($3 \cdot 7 = 21$, $21 > 17$).

Za $b = 1$ vrijedi $3 + 4 \cdot x = 17$ odnosno $4 \cdot x = 14$. No, rješenje ove jednadžbe nije prirodan broj.

Za $b = 3$ vrijedi $9 + 4 \cdot x = 17$ odnosno $4 \cdot x = 8$ pa je $x = 2$.

Za $b = 5$ vrijedi $15 + 4 \cdot x = 17$ odnosno $4 \cdot x = 2$. No, rješenje ove jednadžbe nije prirodan broj.

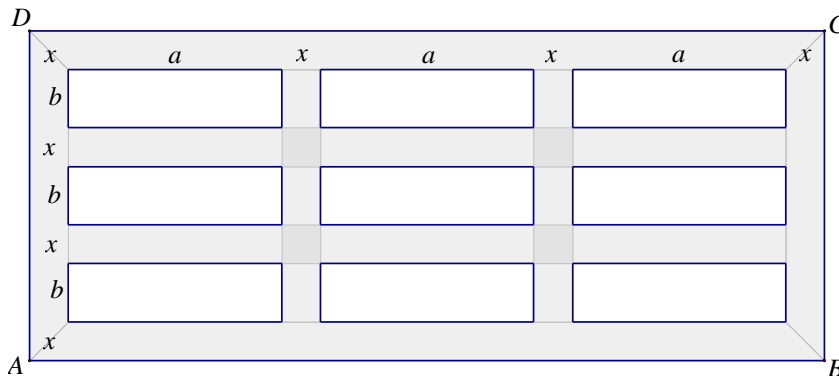
Uvrstimo li $x = 2$ u jednadžbu $3 \cdot a + 4 \cdot x = 41$ redom dobivamo $3 \cdot a + 8 = 41$, $3 \cdot a = 33$, tj. $a = 11$.

Duljine stranica manjeg pravokutnika su 11 cm i 3 cm pa površina jednog manjeg pravokutnika iznosi 33 cm^2 . Površina svih devet manjih pravokutnika iznosi 297 cm^2 .

Površina osjenčanog dijela razlika je površine pravokutnika $ABCD$ i površine devet manjih pravokutnika: $697 - 297 = 400 \text{ cm}^2$.

Drugi način:

Promotrimo sliku i prema uvjetu zadatka označimo odgovarajuće razmake:



Neka su a i b duljine susjednih stranica manjeg pravokutnika, $a > b$, a x širina razmaka. Tada su duljine stranica pravokutnika $ABCD$ jednake $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x$, a površina pravokutnika $ABCD$ jednaka je $|AB| \cdot |BC|$ pa vrijedi jednakost $(3 \cdot a + 4 \cdot x) \cdot (3 \cdot b + 4 \cdot x) = 697$.

Rastavimo li broj 697 na proste faktore, dobit ćemo da je $697 = 41 \cdot 17$. Iz uvjeta $a > b$ slijedi da je $3 \cdot a > 3 \cdot b$ odnosno $3 \cdot a + 4 \cdot x > 3 \cdot b + 4 \cdot x$. Tada je $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x = 41$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x = 17$.

Iz uvjeta da i duljine stranica malih pravokutnika i razmaka budu prirodni brojevi u centimetrima mora vrijediti nejednakost $4 \cdot x < 17$.

Dakle, duljina razmaka x može biti 1 cm, 2 cm, 3 cm ili 4 cm.

Za $x = 1$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 1 = 13$, a u tom slučaju b ne može biti prirodan broj.

Za $x = 2$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 2 = 9$ iz čega slijedi da je $b = 3$ cm.

Za $x = 3$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 3 = 5$, a ni u tom slučaju b ne može biti prirodan broj.

Za $x = 4$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 4 = 1$, a ni u tom slučaju b ne može biti prirodan broj.

To znači da može biti samo $b = 3$ cm.

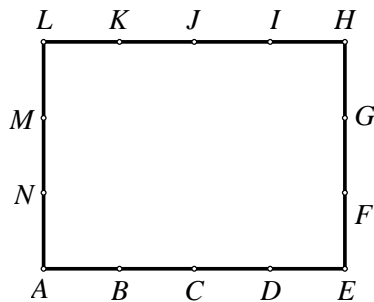
Dalje vrijedi da je $a = (41 - 4x) : 3 = (41 - 4 \cdot 2) : 3 = 11$ cm.

Duljine stranica manjeg pravokutnika su 11 cm i 3 cm pa površina jednog manjeg pravokutnika iznosi 33 cm^2 . Površina svih devet manjih pravokutnika iznosi 297 cm^2 .

Površina osjenčanog dijela razlika je površine pravokutnika $ABCD$ i površine devet manjih pravokutnika: $697 - 297 = 400 \text{ cm}^2$.

5. Prvi način:

Na duljim stranicama istaknute su po tri točke, a na kraćima po dvije točke različite od vrhova A , E , H i L .



Uz oznake kao na slici redom zaključujemo:

Točkom A i još nekim drugim točkama pravokutnika određeno je 8 pravaca.

Točkama B , C i D i nekim drugim točkama (osim A) određeno je $3 \cdot 9 = 27$ pravaca.

Točkom E i još nekim drugim točkama (osim A , B , C i D) pravokutnika određeno je 7 pravaca.

Točkama F i G i nekim drugim točkama (osim A , B , C , D i E) određeno je $2 \cdot 6 = 12$ pravaca.

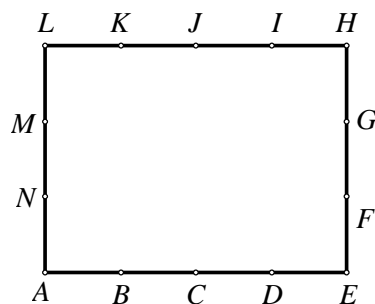
Točkom H i nekim drugim točkama (osim A , B , C , D , E , F i G) određena su 3 pravca.

Točkama K , J i I i nekim drugim točkama (osim A , B , C , D , E , F , G i H) određeno je $3 \cdot 2 = 6$ pravaca.

Te točke određuju $8 + 27 + 7 + 12 + 3 + 6 = 63$ pravca.

Drugi način:

Na duljim stranicama istaknute su po tri točke, a na kraćima po dvije točke različite od vrhova A , E , H i L .



Uz oznake kao na slici redom zaključujemo:

Postoje ukupno 4 pravca kojima pripadaju stranice pravokutnika.

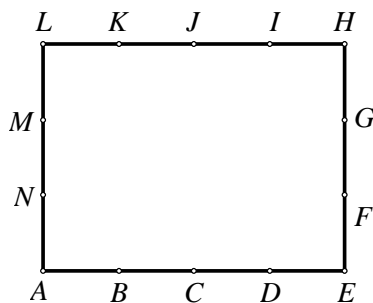
Točke I , J i K sa svakom (od 5) točaka istaknutih na dužini \overline{AE} određuju po 5 različitih pravaca, a točke F , G , M , N , H i L po 4 pravca (različita od stranica). To je $3 \cdot 5 + 6 \cdot 4 = 15 + 24 = 39$ različitih pravaca.

Točke F i G s točkama od I do N (tih je točaka 6) određuju po 6 različitih pravaca i tih je pravaca ukupno $2 \cdot 6 = 12$, a točka H s točkama M i N određuje 2 različita pravca. Točke I , J i K s točkama M i N određuju ukupno 6 pravaca.

Ukupan broj različitih pravaca određenih istaknutim točkama je $4 + 39 + 12 + 2 + 6 = 63$.

Treći način:

Na duljim stranicama istaknute su po tri točke, a na kraćima po dvije točke različite od vrhova A , E , H i L .



Uz oznake kao na slici redom zaključujemo:

Vrhovi pravokutnika određuju ukupno 6 pravaca (4 kojima pripadaju stranice i 2 kojima pripadaju dijagonale).

Vrh A i točke na stranicama \overline{EH} i \overline{HL} određuju 5 pravaca (različitih od stranica i dijagonala).

Vrh E i točke na stranicama \overline{HL} i \overline{AL} određuju 5 pravaca (različitih od stranica i dijagonala).

Točka B i točke na stranicama \overline{EH} , \overline{HL} i \overline{AL} određuju 9 pravaca (različitih od stranica i dijagonala), a isto vrijedi za točke C i D pa je to 27 pravaca.

Točka F i točke na stranicama \overline{HL} i \overline{AL} određuju 6 pravaca (različitih od stranica i dijagonala), a isto vrijedi za točku G pa je to 12 pravaca.

Točka H i točke na stranici \overline{AL} određuju 2 različita pravca (različita od stranica i dijagonala), a isto vrijedi za točke I , J i K pa je to 8 pravaca.

Ukupan broj različitih pravaca određenih istaknutim točkama je $6 + 5 + 5 + 27 + 12 + 8 = 63$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 4.travnja-6.travnja 2016.

6. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je x broj bombona koje je imala Janica.

Bratu je dala $\frac{x}{2}$ bombona pa joj je ostalo $\frac{x}{2}$ bombona.

Pojela je $\frac{1}{6} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{12}$ bombona te je poslije toga imala $\frac{x}{2} - \frac{x}{12} = \frac{5x}{12}$ bombona.

Kako je izgubila 2 ili 3 bombona, a Petri dala 6 bombona, postoje dvije mogućnosti:

$$\frac{5x}{12} - 8 = 21 \text{ ili } \frac{5x}{12} - 9 = 21.$$

$$\text{Iz } \frac{5x}{12} - 8 = 21 \text{ slijedi } x = \frac{29 \cdot 12}{5} \notin \mathbb{N}.$$

$$\text{Iz } \frac{5x}{12} - 9 = 21 \text{ slijedi } x = \frac{30 \cdot 12}{5} = 72.$$

Janica je imala 72 bombona.

Drugi način:

Prije nego što je Petri dala bombone Janica je imala $21 + 6 = 27$ bombona.

Prije toga je izgubila 2 ili 3 bombona, a to znači da je prije toga imala $27 + 2 = 29$ bombona ili

$27 + 3 = 30$ bombona.

Nakon što je bratu dala bombone, pojela je $\frac{1}{6}$ ostatka, a ostalo joj je $\frac{5}{6}$ tog ostatka. Dakle, $\frac{5}{6}$ tog

ostatka je 29 ili 30.

S obzirom da je samo 30 djeljiv s 5, $\frac{5}{6}$ tog ostatka je 30, a ostatak je 36.

Budući da je bratu dala polovinu bombona, Janica je na početku imala $36 \cdot 2 = 72$ bombona.

Treći način:

Označimo broj bombona s x .

Tada iz uvjeta zadatka slijedi $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}x + a + 6 + 21 = x$, pri čemu je a jednako 2 ili 3.

Pomnožimo li gornju jednakost s 12, dobit ćemo $6x + x + 12a + 27 \cdot 12 = 12x$ odnosno

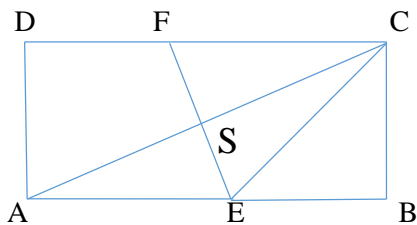
$$5x = 324 + 12a.$$

Za $a = 2$ je $5x = 348$ što je nemoguće jer x mora biti prirodan broj.

Za $a = 3$ je $5x = 360$ odakle slijedi $x = 72$.

Janica je imala 72 bombona.

2. Prvi način:



Kako je trokut EBC jednakokratan pravokutan, vrijedi $|\sphericalangle ECB| = |\sphericalangle BEC| = 45^\circ$.

Budući da je $ABCD$ pravokutnik, slijedi $|\sphericalangle FCE| = 90^\circ - |\sphericalangle ECB| = 45^\circ$.

S obzirom da točka E pripada simetrali EF dijagonale \overline{AC} , onda je $|EA| = |EC|$ što znači da je trokut AEC jednakokratan.

Tada je $|\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle EAC|$.

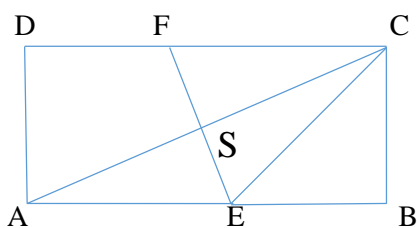
Dalje vrijedi $|\sphericalangle EAC| = |\sphericalangle FCA|$ jer su to šiljasti kutovi s usporednim kracima.

$$\text{Dakle, } |\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle FCA| = \frac{|\sphericalangle FCE|}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ.$$

Kako je $\sphericalangle DFE$ vanjski kut trokuta CFS , vrijedi

$$|\sphericalangle DFE| = |\sphericalangle CSF| + |\sphericalangle FCA| = 90^\circ + 22.5^\circ = 112.5^\circ.$$

Drugi način:



Kako je trokut EBC jednakokratan i pravokutan, vrijedi $|\angle ECB| = |\angle BEC| = 45^\circ$.

Pravac FE je simetrala dijagonale \overline{AC} pa je S polovište dužine \overline{AC} i vrijedi $\overline{FE} \perp \overline{AC}$. Zato je

$\triangle AES \cong \triangle CES$ (prema poučku S-K-S – jedna zajednička kateta, pravi kut i $|AS| = |SC|$).

Slijedi da je $|\angle SEA| = |\angle CES|$. Kako je $|\angle SEA| + |\angle CES| + |\angle BEC| = 180^\circ$, slijedi

$$2|\angle CES| = 180^\circ - 45^\circ \quad \text{odnosno} \quad |\angle CES| = \frac{135^\circ}{2} = 67.5^\circ.$$

Konačno, kako je $ABCD$ pravokutnik, to je $AB \parallel CD$, a za kutove s paralelnim kracima vrijedi

$$|\angle DFE| = |\angle BEF| = |\angle CEF| + |\angle BEC| = 67.5^\circ + 45^\circ = 112.5^\circ = 112^\circ 30'.$$

3. Prvi način:

U tim se brojevima svaka od tih znamenaka pojavljuje na svakom dekadskom mjestu

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \text{ puta.}$$

Zato je zbroj znamenaka na svakom dekadskom mjestu jednak

$$\begin{aligned} & 336 \cdot 9 + 336 \cdot 8 + 336 \cdot 7 + 336 \cdot 6 + 336 \cdot 5 + 336 \cdot 4 + 336 \cdot 3 + 336 \cdot 2 + 336 \cdot 1 = \\ & = 336 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 336 \cdot 45 = 15120. \end{aligned}$$

Onda je zbroj svih tih brojeva

$$\begin{aligned} & 15120 \cdot 1000 + 15120 \cdot 100 + 15120 \cdot 10 + 15120 \cdot 1 = 15120 \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = \\ & = 15120 \cdot 1111 = 16\,798\,320. \end{aligned}$$

Drugi način:

U tim se brojevima svaka od tih znamenaka pojavljuje na svakom dekadskom mjestu

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \text{ puta.}$$

Zato svaka znamenka $x \in \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ pridonosi ukupnom zbroju s

$$336 \cdot x \cdot 1000 + 336 \cdot x \cdot 100 + 336 \cdot x \cdot 10 + 336 \cdot x \cdot 1 = \\ = 336 \cdot x \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 336 \cdot x \cdot 1111.$$

Onda je zbroj svih tih brojeva

$$336 \cdot 1111 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 336 \cdot 1111 \cdot 45 = 16\,798\,320.$$

4. Kako je $6 = 2 \cdot 3$, traženi brojevi trebaju biti djeljivi i s 2 i s 3.

Budući da je traženim brojevima zbroj znamenaka djeljiv sa 6, onda je zbroj znamenaka djeljiv i s 3, a to znači da su djeljivi s 3.

Da bi bili djeljivi s 2 znamenka jedinica treba biti 0, 2, 4, 6 ili 8.

Zbroj znamenaka troznamenkastog broja može biti najviše 27.

S obzirom da je zbroj znamenaka traženih brojeva djeljiv sa 6, zbroj znamenaka traženih brojeva može biti 6, 12, 18 ili 24.

Ako je zbroj 6, znamenke mogu biti iz skupova $\{0, 1, 5\}$, $\{0, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$.

Traženi brojevi su: 150, 510, 204, 240, 402, 420, 312, 132.

Ako je zbroj 12, znamenke mogu biti iz skupova $\{0, 3, 9\}$, $\{1, 2, 9\}$, $\{0, 4, 8\}$, $\{1, 3, 8\}$, $\{0, 5, 7\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 3, 7\}$, $\{1, 5, 6\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{3, 4, 5\}$.

Traženi brojevi su: 390, 930, 192, 912, 408, 480, 804, 840, 138, 318, 570, 750, 174, 714, 372, 732, 156, 516, 246, 264, 426, 462, 624, 642, 354, 534.

Ako je zbroj 18, znamenke mogu biti iz skupova $\{1, 8, 9\}$, $\{2, 7, 9\}$, $\{3, 6, 9\}$, $\{4, 5, 9\}$, $\{3, 7, 8\}$, $\{4, 6, 8\}$, $\{5, 6, 7\}$.

Traženi brojevi su: 198, 918, 792, 972, 396, 936, 594, 954, 378, 738, 468, 486, 648, 684, 846, 864, 576, 756.

Ako je zbroj 24, znamenke mogu biti iz skupa $\{7, 8, 9\}$.

Traženi brojevi su: 798, 978.

Ukupan broj traženih brojeva je 54.

5. Prvi način:

U 1. mogućem slučaju natjecatelji žive u 18 ili više različitih naselja.

Tada iz nekih 18 različitih naselja u kojima žive odaberemo po 1 učenika i time smo izvršili traženi odabir.

U 2. mogućem slučaju natjecatelji žive u 17 različitih naselja.

U tom slučaju nije moguće odabrati 18 učenika koji žive u 18 različitih naselja.

Kada bi u svakom od tih naselja bilo najviše po 17 učenika, tada bi u tih 17 naselja bilo najviše $17 \cdot 17 = 289$ učenika. Kako je ukupan broj učenika 290, u nekom od tih 17 naselja živi barem 18 učenika. Iz takvog naselja odaberemo 18 učenika i time smo izvršili traženi odabir.

U 3. mogućem slučaju natjecatelji žive u 16 ili manje različitih naselja.

U tom slučaju (analogno kao u 2. slučaju) u nekom od tih naselja živi barem 18 učenika pa iz takvog naselja odaberemo 18 učenika i imamo traženi odabir.

Drugi način:

Pretpostavimo da se ne može odabrati 18 učenika koji žive u istom naselju niti 18 učenika koji dolaze iz 18 različitih naselja.

To znači da svi učenici dolaze iz najviše 17 naselja i iz svakog naselja dolazi najviše 17 učenika.

U tom slučaju bi najveći mogući broj učenika bio $17 \cdot 17 = 289$, a na natjecanju je 290 učenika (jedan više).

Dakle, pretpostavka je bila netočna pa iz jednog naselja dolazi (barem) 18 učenika ili se može odabrati 18 učenika iz 18 različitih naselja, a što je i trebalo dokazati.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 4.travnja-6.travnja 2016.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je c cijena ulaznice prije, a C nakon poskupljenja i neka je z zarada prije, a Z nakon poskupljenja te neka je n broj gledatelja prije, a N poslije poskupljenja.

Cijena ulaznica povećala se 40% pa je $C = 1.4c$, a zarada se povećala 26% pa je $Z = 1.26z$.

Broj gledatelja je manji i iznosi $p\%$ broja gledatelja prije poskupljenja cijene ulaznica pa vrijedi da

$$\text{je } N = p\% \cdot n = \frac{p}{100} \cdot n.$$

Zarada prije poskupljenja je $z = n \cdot c$, a zarada poslije poskupljenja je $Z = N \cdot C$.

$$\text{Dalje vrijedi } Z = N \cdot C = \frac{p}{100} \cdot n \cdot 1.4 \cdot c = 1.4 \cdot \frac{p}{100} \cdot (n \cdot c) = 1.4 \cdot \frac{p}{100} \cdot z.$$

$$\text{Dalje je } 1.26 \cdot z = 1.4 \cdot \frac{p}{100} \cdot z \text{ odnosno } 1.26 = 1.4 \cdot \frac{p}{100} \text{ te konačno } \frac{p}{100} = \frac{1.26}{1.4} = \frac{126}{140} = \frac{90}{100}.$$

Prema tome je $N = 90\% n$. Dakle, broj gledatelja smanjio se za 10%.

Drugi način.

Neka je c cijena ulaznice prije, a C nakon poskupljenja i neka je z zarada prije, a Z nakon poskupljenja te neka je n broj gledatelja prije, a N poslije poskupljenja.

Tada vrijedi $z = n \cdot c$ i $Z = N \cdot C$.

Cijena ulaznica povećala se 40% pa je $C = 1.4c$, a zarada se povećala 26% pa je $Z = 1.26z$.

Dalje vrijedi $Z = N \cdot C = N \cdot 1.4c$ i $Z = 1.26z = 1.26n \cdot c$ odnosno $N \cdot 1.4c = 1.26n \cdot c$.

Zaključujemo da je

$$\frac{N}{n} = \frac{1.26c}{1.4c} = \frac{1.26}{1.4} = 0.9 \text{ ili } N = 0.9n.$$

Prema tome je $N = 90\% n$. Dakle, broj gledatelja smanjio se za 10%.

2. Prvi način.

Jednakosti $\frac{a+b}{3} = \frac{b+c}{4} = \frac{c+a}{5}$ mogu se zapisati kao tri jednačbe.

$$1. \frac{a+b}{3} = \frac{b+c}{4} \Rightarrow 4a+4b = 3b+3c \Rightarrow b = 3c - 4a$$

$$2. \frac{b+c}{4} = \frac{c+a}{5} \Rightarrow 5b+5c = 4c+4a \Rightarrow c = 4a - 5b$$

$$3. \frac{a+b}{3} = \frac{c+a}{5} \Rightarrow 5a+5b = 3c+3a \Rightarrow 2a = 3c - 5b$$

Koristeći drugu i treću jednačbu dobiva se:

$$c = 4a - 5b = 2 \cdot 2a - 5b = 2 \cdot (3c - 5b) - 5b = 6c - 10b - 5b = 6c - 15b \Rightarrow 5c = 15b \Rightarrow \underline{c = 3b}.$$

Dalje, iz treće jednačbe dobiva se: $2a = 3c - 5b = 3 \cdot 3b - 5b = 9b - 5b = 4b \Rightarrow \underline{a = 2b}$.

Nakon uvrštavanja dobivamo redom:

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c = 100 \cdot 2b + 10 \cdot b + 3b = 200b + 10b + 3b = 213b.$$

Budući da su a, b i c znamenke, postoje tri troznamenka broja za $b \in \{1, 2, 3\}$, a traženi brojevi su

213, 426, 639.

Drugi način.

Raspisujući zadani uvjet redom dobivamo:

$$\frac{a+b}{3} = \frac{b+c}{4} = \frac{c+a}{5} = k, k > 0$$

$$\frac{a+b}{3} = k \Rightarrow a+b = 3 \cdot k \Rightarrow \underline{a = 3k - b}$$

$$\frac{c+a}{5} = k \Rightarrow c+a = 5 \cdot k \Rightarrow c = 5k - a = 5k - (3k - b) = 5k - 3k + b \Rightarrow \underline{c = 2k + b}$$

$$\frac{b+c}{4} = k \Rightarrow b+c = 4 \cdot k \Rightarrow b = 4k - c = 4k - (2k + b) = 4k - 2k - b = 2k - b$$

$$\underline{b = 2k - b} \Rightarrow 2b = 2k \Rightarrow k = b$$

Prema tome, za znamenke a, b i c vrijedi $a = 2k, b = k, c = 3k, k \in \mathbb{N}$. Uvrštavanjem prirodnih

brojeva umjesto k , redom dobivamo:

k	1	2	3	4
$a = 2k$	2	4	6	8
$b = k$	1	2	3	4
$c = 3k$	3	6	9	12
\overline{abc}	213	426	639	-

Budući da su a , b i c znamenke postoje tri troznamenasta broja za $b \in \{1, 2, 3\}$, a traženi brojevi su 213, 426, 639.

3. Prilikom rješavanja koristi se svojstvo množenja cijelih brojeva: *Umnožak cijelih brojeva je cijeli broj.*

Dakle, pomnoži li se razlomak $\frac{4x-17}{5x+9}$ brojem 5, dobiveni će umnožak ponovno biti cijeli broj, tj.

zadani razlomak pišemo u obliku $\frac{4x-17}{5x+9} \cdot 5 = \frac{20x-85}{5x+9}$. Brojnik novog razlomka rastavljamo tako

da dobijemo dio koji je višekratnik nazivnika:

$$\frac{20x-85}{5x+9} = \frac{20x+36-121}{5x+9} = \frac{20x+36}{5x+9} - \frac{121}{5x+9} = \frac{4 \cdot (5x+9)}{5x+9} - \frac{121}{5x+9} = 4 - \frac{121}{5x+9}.$$

Razlomak $\frac{4x-17}{5x+9}$ će biti cijeli broj ako je $\frac{121}{5x+9}$ cijeli broj.

Razlomak $\frac{121}{5x+9}$ će biti cijeli broj ako je nazivnik $5x+9$ djelitelj broja 121.

Djelitelji broja 121 su 1, -1, 11, -11, 121, -121.

Za pozitivne djelitelje (1, 11 i 121) se ne dobivaju cjelobrojna rješenja.

Za negativne djelitelje (-1, -11 i -121) redom dobivamo:

a) $5x+9 = -1 \rightarrow 5x = -10 \rightarrow x = -2,$

b) $5x+9 = -11 \rightarrow 5x = -20 \rightarrow x = -4,$

c) $5x+9 = -121 \rightarrow 5x = -130 \rightarrow x = -26.$

Uvrštavanjem vrijednosti x u razlomak $\frac{4x-17}{5x+9}$ slijedi:

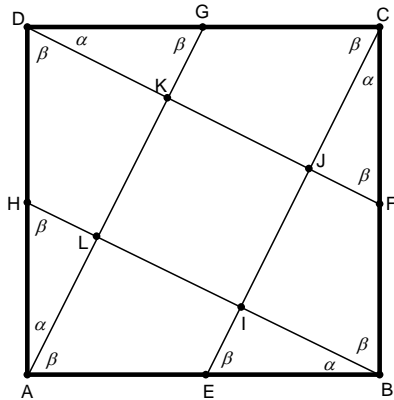
a) za $x = -2$ je $\frac{4x-17}{5x+9} = \frac{-8-17}{-10+9} = \frac{-25}{-1} = 25$, što je cijeli broj;

b) za $x = -4$ je $\frac{4x-17}{5x+9} = \frac{-16-17}{-20+9} = \frac{-33}{-11} = 3$, što je cijeli broj;

c) za $x = -26$ je $\frac{4x-17}{5x+9} = \frac{-104-17}{-130+9} = \frac{-121}{-121} = 1$, što je također cijeli broj.

Dakle, rješenja su cijeli brojevi -2, -4 i -26.

4. Uz oznake kao na slici vrijedi:



Pravokutni trokuti EBC , FCD , GDA i HAB međusobno su sukladni prema poučku o sukladnosti trokuta S-K-S jer je $|EB| = |FC| = |GD| = |HA| = 5$ cm i $|BC| = |CD| = |DA| = |AB| = 10$ cm.

Posljedica navedene sukladnosti je jednakost veličina odgovarajućih kutova tih trokuta:

$$|\angle HBA| = |\angle ECB| = |\angle FDC| = |\angle GAD| = \alpha,$$

$$|\angle BEC| = |\angle CFD| = |\angle DGA| = |\angle AHB| = \beta.$$

Budući da je $\alpha + \beta = 90^\circ$, slijedi da su kutovi s vrhovima u točkama I , J , K i L pravi, tj. da je četverokut $IJKL$ pravokutnik te da je $|\angle CBI| = |\angle DCJ| = |\angle ADK| = |\angle BAL| = \beta$.

Pravokutni trokuti ABL , BCI , CDJ i DAK sukladni su prema poučku o sukladnosti trokuta K-S-K.

Zaključujemo da je \overline{EC} usporedna s \overline{AG} kao i \overline{BH} s \overline{FD} .

Dužina \overline{JF} srednjica je trokuta BCI pa je $|IJ| = |CJ| = \frac{1}{2}|IC|$ i $|JF| = \frac{1}{2}|IB| = x$. Analogno vrijedi za

duljine stranica preostalih trokuta (ABL , CDJ i DAK), a time i za duljine stranica četverokuta $IJKL$.

Dakle, $|JF| = |KG| = |LH| = |IE| = x$ i $|CJ| = |IJ| = |DK| = |KJ| = |AL| = |LK| = |BI| = |IL| = 2x$.

Dakle, četverokut $IJKL$ je kvadrat sa stranicom duljine $2x$.

Preostaje izračunati površinu kvadrata $IJKL$. To možemo napraviti na više načina.

Prvi način:

Prema gore dokazanom zaključujemo da vrijedi $|EC| = |EI| + |IJ| + |JC| = 5x$ i $|IC| = |IJ| + |JC| = 4x$.

Prema poučku K-K trokut EBC sličan je trokutu BIC pa vrijedi $|EC| : |BC| = |BC| : |IC|$.

Uvrštavanjem poznatih podataka u taj razmjjer dobivamo redom:

$$5x : 10 = 10 : 4x$$

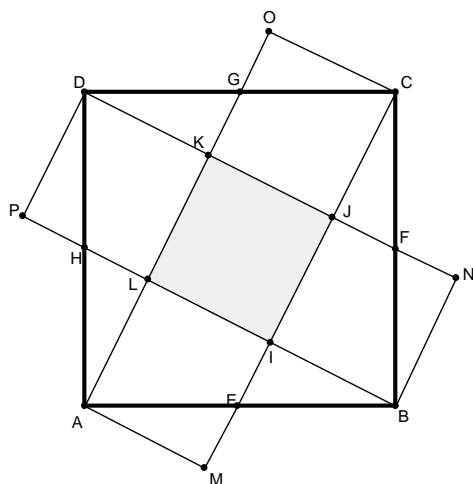
$$20 \cdot x \cdot x = 100$$

$$x \cdot x = 5$$

Konačno, površina kvadrata $IJKL$ jednaka je $P(IJKL) = |IJ| \cdot |JK| = 2x \cdot 2x = 4 \cdot x \cdot x = 4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}^2$.

Drugi način:

Nadopunimo sliku s četiri pravokutna trokuta.

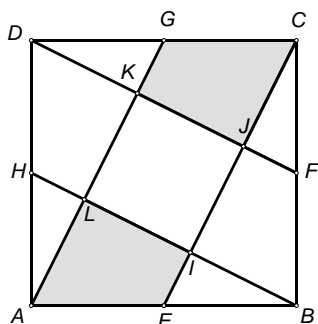


Trapeze $IBFJ$, $JCGK$, $KDHL$ i $LAEI$ moguće je nadopuniti do kvadrata pravokutnim trokutima BNF , COG , DPH i AME koji su sukladni trokutima CJF , DKG , ALH i BIE . Jednostavno je uočiti da je površina kvadrata $ABCD$ jednaka površini pet manjih kvadrata ($AMIL$, $BNJI$, $COKJ$, $DPLK$ i $IJKL$ od kojih je jedan osjenčan), a koji su međusobno sukladni.

Dakle, površina osjenčanog kvadrata jednaka je $100 : 5 = 20 \text{ cm}^2$.

Treći način:

Kvadrat $ABCD$ možemo podijeliti na dva sukladna pravokutna trokuta AGD i CEB . Svaki od njih ima površinu 25 cm^2 . To znači da je površina paralelograma $AECG$ jednaka 50 cm^2 .



Paralelogram $AECG$ sastavljen je od kvadrata $IJKL$ (čiju površinu tražimo) i dvaju pravokutnih trapeza $AEIL$ i $JCGK$. Duljine osnovica tih trapeza su $2x$ i x , a duljina visine im je jednaka $2x$. To

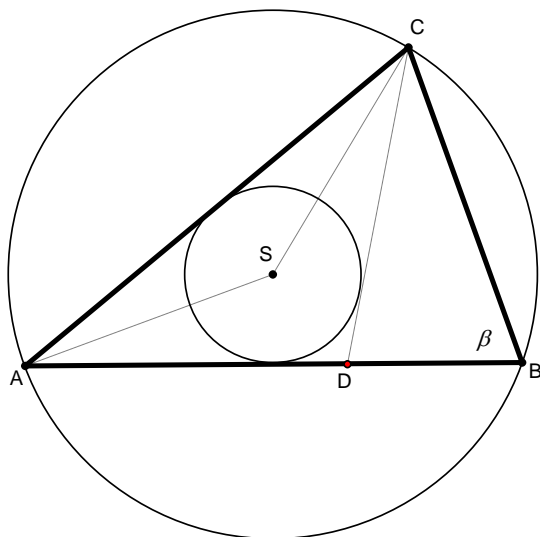
znači da svaki od njih ima površinu $\frac{(2x+x) \cdot 2x}{2} = 3x \cdot x = 3x^2$, a površina kvadrata jednaka je

$$2x \cdot 2x = 4x \cdot x = 4x^2.$$

Prema tome, vrijedi $3x^2 + 3x^2 + 4x^2 = 50$, tj. $10x^2 = 50$, odakle je $4x^2 = 20$.

Površina kvadrata $IJKL$ je 20 cm^2 .

5.



Neka je S središte upisane kružnice trokuta ADC i središte opisane kružnice trokuta ABC i neka je $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Kutovi $\sphericalangle ASC$ i $\sphericalangle ABC$ su središnji i pripadni obodni kut nad tetivom \overline{AC} . Na temelju poučka o središnjem i obodnom kutu vrijedi da je $|\sphericalangle ASC| = 2\beta$.

Iz trokuta ASC , koji je jednakokrakan jer je $|SA| = |SC|$, može se zaključiti da je

$$|\sphericalangle SAC| = |\sphericalangle SCA| = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta.$$

Pravac AS je simetrala unutarnjeg kuta trokuta ADC (ABC) pri vrhu A pa je

$$\alpha = |\sphericalangle CAB| = 2 \cdot (90^\circ - \beta) = 180^\circ - 2\beta.$$

Na isti način vrijedi $|\sphericalangle ACD| = 2 \cdot (90^\circ - \beta) = 180^\circ - 2\beta$.

Dalje možemo nastaviti na više načina.

Prvi način:

Pravac CD je simetrala kuta trokuta pri vrhu C pa je $\gamma = |\angle ACB| = 2 \cdot (180^\circ - 2\beta) = 360^\circ - 4\beta$.

Iz zbroja kutova trokuta ABC redom slijedi

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta + (180^\circ - 2\beta) + (360^\circ - 4\beta) = 180^\circ \rightarrow 5\beta = 360^\circ \rightarrow \beta = 72^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (72^\circ + 36^\circ) = 72^\circ$$

Trokut ABC je jednakokračan s kutovima veličina 72° , 72° i 36° .

Drugi način:

Budući da je $|\angle CAB| = |\angle ACD| = 180^\circ - 2\beta$, trokut ADC je jednakokračan s osnovicom \overline{AC} .

Kut $\angle BDC$ je vanjski kut trokuta ADC i vrijedi da je

$$|\angle BDC| = |\angle DAC| + |\angle ACD| = 2(180^\circ - 2\beta) = 360^\circ - 4\beta.$$

Za kutove trokuta DBC vrijedi:

$$|\angle BDC| + |\angle CBD| + |\angle DCB| = 180^\circ$$

$$(360^\circ - 4\beta) + \beta + (180^\circ - 2\beta) = 180^\circ$$

$$5\beta = 360^\circ$$

$$\beta = 72^\circ$$

Dalje slijedi da je $\gamma = 72^\circ$ i $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ$.

Treći način:

Zbog činjenice da je u trokutu ABC $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ i da je $\alpha = |\angle CAB| = 180^\circ - 2\beta$, vrijedi

$$180^\circ - 2\beta + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ odnosno } -\beta + \gamma = 0 \text{ što znači da je } \beta = \gamma \text{ i da je trokut } ABC$$

jednakokračan s osnovicom \overline{BC} .

Budući da je pravac CD simetrala kuta $\angle BCA$, zaključujemo da je $\gamma = 2\alpha$, a onda je i $\beta = 2\alpha$.

Konačno, uvrštavanjem dobivenih relacija u izraz $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ redom dobivamo:

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ, 5\alpha = 180^\circ, \alpha = 36^\circ \text{ i } \beta = \gamma = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 4.travnja-6.travnja 2016.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$\begin{aligned} a - b &= \underbrace{111\dots11}_{2016} - \underbrace{222\dots22}_{1008} = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{999\dots99}_{2016} - \frac{2}{9} \cdot \underbrace{999\dots99}_{1008} = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (10^{2016} - 1) - \frac{2}{9} \cdot (10^{1008} - 1) = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (10^{2016} - 1 - 2 \cdot 10^{1008} + 2) = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (10^{2016} - 2 \cdot 10^{1008} + 1) = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (10^{1008} - 1)^2 = \left(\frac{10^{1008} - 1}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

Kako je $10^{1008} - 1 = \underbrace{999\dots99}_{1008}$ broj djeljiv s 9, pa i s 3, to je $\frac{10^{1008} - 1}{3}$ cijeli broj pa je $a - b$ kvadrat cijelog broja.

Drugi način:

$$\begin{aligned} a - b &= \underbrace{111\dots11}_{2016} - \underbrace{222\dots22}_{1008} = \underbrace{111\dots11}_{2016} - 2 \cdot \underbrace{111\dots11}_{1008} = \\ &= \underbrace{111\dots11}_{1008} \cdot \underbrace{100\dots01}_{1007} - 2 \cdot \underbrace{111\dots11}_{1008} = \\ &= \underbrace{111\dots11}_{1008} \cdot \left(\underbrace{100\dots01}_{1007} - 2 \right) = \underbrace{111\dots11}_{1008} \cdot \underbrace{999\dots99}_{1008} = \\ &= \underbrace{111\dots11}_{1008} \cdot 9 \cdot \underbrace{111\dots11}_{1008} = \underbrace{111\dots11}_{1008}^2 \cdot 3^2 = \\ &= \underbrace{333\dots33}_{1008}^2 \end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana.

2. Prvi način:

Pretpostavimo da je $a > b$.

Kako su a i b iz skupa $\{1, 2, 3, 4, \dots, 25, 26\}$ i njihov umnožak je jednak zbroju preostala 24 broja,

vrijedi $a + b + a \cdot b = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 25 + 26$ odnosno $a + b + a \cdot b = 351$.

S obje strane jednakosti dodajemo 1 pa vrijedi $a + b + a \cdot b + 1 = 352$.

Faktorizacijom lijeve strane dobivamo $(1 + b) \cdot (1 + a) = 352$.

Znači, broj 352 je umnožak neka dva prirodna broja $a + 1$ i $b + 1$.

Rastavljanjem broja 352 na proste faktore dobivamo $352 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11$.

Brojevi a i b su iz skupa $\{1, 2, 3, 4, \dots, 25, 26\}$, $a > b$, pa slijedi da je $a + 1 = 22$ i $b + 1 = 16$.

Nadalje, $a = 21$ i $b = 15$.

Slično se za $a < b$ dobije $a = 15$ i $b = 21$.

U oba slučaja slijedi $|a - b| = 6$.

Drugi način:

Pretpostavimo da je $a > b$.

Kako su a i b iz skupa $\{1, 2, 3, 4, \dots, 25, 26\}$ i njihov umnožak je jednak zbroju preostala 24 broja,

vrijedi $a + b + a \cdot b = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 25 + 26$ odnosno $a + b + a \cdot b = 351$.

Nadalje je $a \cdot b + a = 351 - b$

$$a \cdot (b + 1) = 351 - b$$

$$a = \frac{351 - b}{b + 1} = \frac{-(b + 1) + 352}{b + 1} = \frac{-(b + 1)}{b + 1} + \frac{352}{b + 1} = -1 + \frac{352}{b + 1}.$$

To znači da $b + 1$ mora biti djelitelj broja 352.

Rastavljanjem broja 352 na proste faktore dobivamo $352 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11$.

Brojevi a i b su iz skupa $\{1, 2, 3, 4, \dots, 25, 26\}$, $a > b$, pa slijedi da je $b + 1 = 16$ odnosno $b = 15$.

Nadalje, $a = -1 + \frac{352}{b + 1} = -1 + 22 = 21$.

Slično se za $a < b$ dobije $a = 15$ i $b = 21$.

U oba slučaja slijedi $|a - b| = 6$.

Treći način:

Pretpostavimo da je $a > b$.

Kako su a i b iz skupa $\{1, 2, 3, 4, \dots, 25, 26\}$ i njihov umnožak je jednak zbroju preostala 24 broja, vrijedi $a + b + a \cdot b = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 25 + 26$ odnosno $a + b + a \cdot b = 351$.

Tada vrijedi:

1. $3 \leq a + b \leq 51 \Rightarrow 300 \leq ab \leq 348$;
2. a i b ne mogu istovremeno biti parni.

Promotrimo parove koji zadovoljavaju 1. i 2.:

- za $a = 26 \Rightarrow b = 13$, ali $26 \cdot 13 + 26 + 13 = 338 + 39 = 377 > 351$;
- za $a = 25 \Rightarrow b = 12$ ili 13 , ali $25 \cdot 12 + 25 + 12 = 300 + 37 = 337 < 351$;
 $25 \cdot 13 + 25 + 13 = 325 + 38 = 363 > 351$;
- za $a = 24 \Rightarrow b = 13$, ali $24 \cdot 13 + 24 + 13 = 312 + 37 = 349 < 351$;
- za $a = 23 \Rightarrow b = 14$ ili 15 , ali $23 \cdot 14 + 23 + 14 = 322 + 37 = 359 > 351$;
 $23 \cdot 15 + 23 + 15 = 345 + 38 = 383 > 351$;
- za $a = 22 \Rightarrow b = 15$, ali $22 \cdot 15 + 22 + 15 = 330 + 37 = 367 > 351$;
- za $a = 21 \Rightarrow b = 15$ ili 16 , i vrijedi $21 \cdot 15 + 21 + 15 = 315 + 36 = 351$ (rješenje!!!!);
dok je $21 \cdot 16 + 21 + 16 = 336 + 37 = 373 > 351$;
- za $a = 20 \Rightarrow b = 15$ ili 17 , ali $20 \cdot 15 + 20 + 15 = 300 + 35 = 335 < 351$;
 $20 \cdot 17 + 20 + 17 = 340 + 37 = 377 > 351$;
- za $a = 19 \Rightarrow b = 16, 17$ ili 18 , ali $19 \cdot 16 + 19 + 16 = 304 + 35 = 339 < 351$;
 $19 \cdot 17 + 19 + 17 = 323 + 36 = 359 > 351$;
 $19 \cdot 18 + 19 + 18 = 342 + 37 = 379 > 351$;
- za $a = 18 \Rightarrow b = 17$, ali $18 \cdot 17 + 18 + 17 = 306 + 35 = 341 < 351$.

Dakle, jedino moguće rješenje je $a = 21, b = 15$.

Slično se za $a < b$ dobije $a = 15$ i $b = 21$.

U oba slučaja slijedi $|a - b| = 6$.

3. Prvi način:

Neka je bilo m muškaraca. Broj rukovanja može se prikazati formulom $\frac{m \cdot (m-1)}{2}$.

Iz jednadžbe $\frac{m \cdot (m-1)}{2} = 78$ dobije se kvadratna jednadžba $m^2 - m - 156 = 0$.

Iz rastava $(m - 13) \cdot (m + 12) = 0$ vidi se da su rješenja jednadžbe $m_1 = 13$ i $m_2 = -12$.

Broj m mora biti prirodni broj pa se zaključi da je na večeri bilo 13 muškaraca.

Neka je n broj dama na večeri. Broj poljubaca među damama se može iskazati kao $n \cdot (n - 1)$, a broj poljubaca između muškaraca i dama s $13 \cdot n$.

Iz $n \cdot (n - 1) + 13n = 288$ sređivanjem se dobije kvadratna jednačba $n^2 + 12n - 288 = 0$.

Rastavom $(n - 12) \cdot (n + 24) = 0$ dolazi se do rješenja jednačbe $n_1 = 12$ i $n_2 = -24$.

Kako i n mora biti prirodan broj, očito je na večeri bilo 12 dama.

Ukupno je na večeri bilo 25 osoba.

Drugi način:

Neka je bilo m muškaraca. Broj rukovanja može se prikazati formulom $\frac{m \cdot (m - 1)}{2}$.

Iz jednačbe $\frac{m \cdot (m - 1)}{2} = 78$ dobijemo broj muškaraca: $m \cdot (m - 1) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$

$$m \cdot (m - 1) = 13 \cdot 12$$

$$m = 13.$$

Na večeri je bilo 13 muškaraca.

Neka je n broj dama na večeri. Broj poljubaca među damama se može iskazati kao $n \cdot (n - 1)$, a broj poljubaca između muškaraca i dama s $13 \cdot n$.

Iz jednačbe $n \cdot (n - 1) + 13n = 288$ dobijemo broj dama: $n \cdot (n - 1 + 13) = 288$

$$n \cdot (n + 12) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

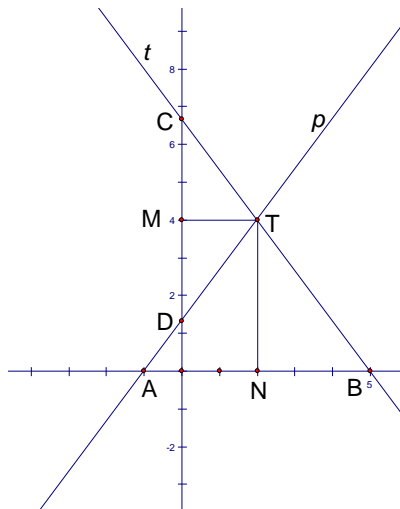
$$n \cdot (n + 12) = 12 \cdot 24$$

$$n = 12.$$

Na večeri je bilo 12 dama.

Ukupno je na večeri bilo 25 osoba.

4. Skica:



$\triangle ABT$ je jednakokrčan te visina iz vrha T dijeli osnovicu \overline{AB} na dva jednaka dijela.

Tada je $a = |AB|$, $\frac{a}{2} = |NB|$, $|TN| = 4$ te je $P(\triangle ABT) = \frac{a \cdot 4}{2} = 2a$.

$\triangle CDT$ je jednakokrčan te visina iz vrha T dijeli osnovicu \overline{CD} na dva jednaka dijela.

Tada je $b = |CD|$, $\frac{b}{2} = |MC|$, $|TM| = 2$ te je $P(\triangle CDT) = \frac{b \cdot 2}{2} = b$.

Iz zadanog omjera površina $P(\triangle ABT) : P(\triangle CDT) = 9 : 4$ dobijemo: $2a : b = 9 : 4$

$$9b = 8a$$

$$b = \frac{8}{9}a.$$

U trokutu $\triangle ABT$ vrijedi $\overline{TN} \perp \overline{AB}$, a u trokutu $\triangle CDT$ vrijedi $\overline{TM} \perp \overline{CD}$.

Slijedi da je $\overline{MC} \parallel \overline{TN}$ i $\overline{TM} \parallel \overline{NB}$ pa su trokuti $\triangle NBT$ i $\triangle MTC$ slični prema poučku K-K o sličnosti.

Iz sličnosti vrijedi proporcija: $|NB| : |TN| = |TM| : |MC|$

$$\frac{a}{2} : 4 = 2 : \frac{b}{2}$$

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = 8$$

$$ab = 32.$$

Uvrstimo li $b = \frac{8}{9}a$ u jednadžbu $ab = 32$ slijedi: $a \cdot \frac{8}{9}a = 32$

$$8a^2 = 288$$

$$a^2 = 36$$

$$a = 6.$$

Koordinate točke N su $N(2,0)$, a kako je točka N polovište dužine \overline{AB} , slijedi da su koordinate točaka A i B jednake $A(-1,0)$, $B(5,0)$.

Pravac p zadan je točkama $A(-1,0)$ i $T(2,4)$ i neka je njegova jednadžba $y = a_1x + b_1$.

Tada je:

$$0 = a_1 \cdot (-1) + b_1$$

$$\underline{4 = a_1 \cdot 2 + b_1}$$

a rješavanjem tog sustava jednadžbi slijedi $a_1 = \frac{4}{3}$, $b_1 = \frac{4}{3}$.

Dakle, $p \dots y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$.

Pravac t zadan je točkama $B(5,0)$ i $T(2,4)$ i neka je njegova jednadžba $y = a_2x + b_2$.

Tada je:

$$0 = a_2 \cdot 5 + b_2$$

$$\underline{4 = a_2 \cdot 2 + b_2}$$

a rješavanjem tog sustava jednadžbi slijedi $a_2 = -\frac{4}{3}$, $b_2 = \frac{20}{3}$.

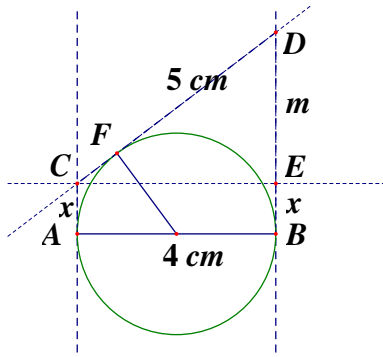
Dakle, $t \dots y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3}$.

Napomena: Na skici su se mogli postaviti zamijenjeni položaji pravaca p i t , točaka A i B te točaka C i D . Tada će i rješenja imati zamijenjene vrijednosti.

5. Prvi način: Algebarski pristup.

Potrebno je odrediti udaljenost točke C od pravca AB .

Skica:



Nacrtamo paralelu s promjerom \overline{AB} kroz C te neka je $x = |AC| = |BE|$.

Dobijemo pravokutan trokut CED s hipotenuzom \overline{CD} duljine 5 cm i katetom \overline{CE} duljine 4 cm.

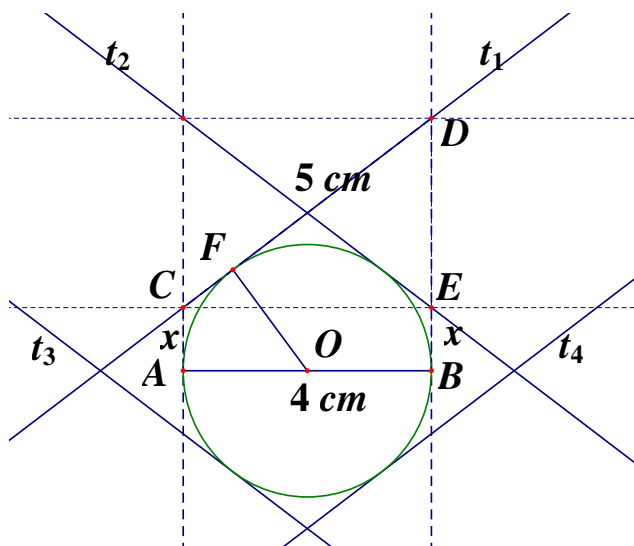
Primjenom Pitagorinog poučka izračunamo duljinu druge katete \overline{ED} te vrijedi $|DE| = 3$ cm.

Dužina \overline{CF} je duljine x jer su trokuti AOC i FOC sukladni. (Pravokutni trokuti nad istom hipotenuzom \overline{OC} - sukladne dvije odgovarajuće stranice i sukladni kutovi nasuprot veće stranice.)

Dužina \overline{FD} je duljine $x + 3$ jer su trokuti BOD i FOD sukladni. (Pravokutni trokuti nad istom hipotenuzom \overline{OD} - sukladne dvije odgovarajuće stranice i sukladni kutovi nasuprot veće stranice.)

Iz gornje dvije tvrdnje slijedi $x + x + 3 = 5$ odnosno $2x + 3 = 5$ pa je $x = 1$ cm.

Kako tražene udaljenosti možemo nanijeti na četiri različita načina moguća su četiri rješenja za tangentu.



Drugi način: Konstrukcijom.

1. Nacrtamo kružnicu k sa središtem O promjera 4 cm.
2. Na kružnici k odaberemo promjer \overline{AB}
3. Točkom A konstruiramo okomicu na promjer, tj. tangentu t_A kružnice k u točki A .
4. Točkom B konstruiramo okomicu na promjer, tj. tangentu t_B kružnice k u točki B .
5. Na tangenti t_A odaberemo proizvoljnu točku P .
6. Nacrtamo kružnicu $k_1(P, 5\text{ cm})$.
7. Kružnica k_1 i tangenta t_B sijeku se u dvije točke R_1 i R_2 .
8. Točkom O konstruiramo okomicu o' na pravac PR_1 .
9. Kružnica k i pravac o' sijeku se u točkama 1 i 2, koje su dirališta traženih tangenti.
10. Točkom 1 konstruiramo paralelu s pravcem PR_1 , to je tangenta t_{C1} .
11. Točkom 2 konstruiramo paralelu s pravcem PR_1 , to je tangenta t_{C2} .
12. Točkom O konstruiramo okomicu o'' na pravac PR_2 .
13. Kružnica k_1 i pravac o'' sijeku se u točkama 3 i 4, koje su dirališta traženih tangenti.
14. Točkom 3 konstruiramo paralelu s pravcem PR_2 , to je tangenta t_{C3} .
15. Točkom 4 konstruiramo paralelu s pravcem PR_2 , to je tangenta t_{C4} .

