ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2013.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Brisanjem prve dvije znamenke nekog prirodnog broja n dobije se 73 puta manji broj. Odredi dva najmanja takva broja n.

Rješenje.

Neka je $\overline{ab}$ dvoznamenkasti početak, a x ostatak promatranog broja n, te neka je k broj znamenaka broja x.

Dani se uvjet može zapisati ovako:

$$n = 10^k \cdot \overline{ab} + x = 73x,$$

odnosno

$$10^k \cdot \overline{ab} = 72x. \qquad (*)$$ 1 bod

Pokušajmo odrediti rješenje za koje je x jednoznamenkasti broj. Tada je $k = 1$, a x znamenka. Jednadžba $(*)$ u tom slučaju postaje $10 \cdot \overline{ab} = 72x$. 1 bod

Kako je lijeva strana dobivene jednakosti pozitivna i djeljiva s 5, mora biti $x = 5$. 1 bod

Iz $10 \cdot \overline{ab} = 360$ dobivamo $\overline{ab} = 36$, a traženi broj $n = 365$. 2 boda

Uzmimo sada da je x dvoznamenkasti broj i $k = 2$. Tada jednadžba $(*)$ postaje $100 \cdot \overline{ab} = 72x$, 1 bod

odnosno $25 \cdot \overline{ab} = 18x$.

Vidimo da x mora biti djeljiv s 25, a $\overline{ab}$ s 18. 2 boda

Najmanje rješenje dobiva se za $\overline{ab} = 18$ – tada je $x = 25$, a broj sa željenim svojstvom $n = 1825$. 2 boda

Zadatak A-1.2.

Odredi sve uređene trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{28} \\ xy-2z^2=7. \end{cases}$$

Prvo rješenje.

Uvrstimo u drugu jednadžbu $y = 2\sqrt{7} - x$ i transformirajmo dobivenu jednadžbu:

$$x\left(2\sqrt{7}-x\right)-2z^2=7, \qquad \text{1 bod}$$

$$x^2-2x\sqrt{7}+7+2z^2=0,$$

$$\left(x-\sqrt{7}\right)^2+2z^2=0. \qquad \text{3 boda}$$

Kako kvadrati realnih brojeva ne mogu biti negativni, 1 bod

ova jednadžba je zadovoljena samo za $x = \sqrt{7}$, $z = 0$. 2 boda

Tada je $y = \sqrt{7}$. 1 bod

Provjerimo da su za $(x, y, z) = (\sqrt{7}, \sqrt{7}, 0)$ zadovoljene obje jednadžbe.
Imamo $\sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7} = \sqrt{28}$ i $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} - 2 \cdot 0^2 = 7$. 2 boda

Drugo rješenje.

Kvadriranjem prve jednadžbe dobivamo

$$x^2+2xy+y^2=28. \qquad \text{1 bod}$$

Oduzmemo li od toga četverostruku drugu jednadžbu, dobivamo

$$x^2+y^2-2xy+8z^2=0 \qquad \text{1 bod}$$

što možemo pisati u obliku

$$(x-y)^2+8z^2=0. \qquad \text{2 boda}$$

Odavde vidimo da mora vrijediti $x = y$ i $z = 0$ 2 boda

jer kvadrati realnih brojeva ne mogu biti negativni. 1 bod

Sada iz prve jednadžbe dobivamo $x = y = \sqrt{7}$. 1 bod

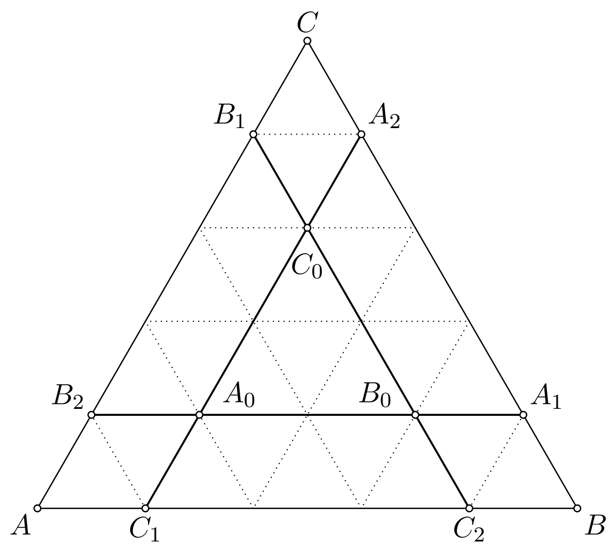
Provjerimo još da je za $(x, y, z) = (\sqrt{7}, \sqrt{7}, 0)$ zadovoljena i druga jednadžba.
Zaista $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} - 2 \cdot 0^2 = 7$. 2 boda

Zadatak A-1.3.

Paralelno stranicama jednakostraničnog trokuta povučeni su pravci koji dijele taj trokut na tri sukladna romba, tri sukladna trapeza i jedan jednakostranični trokut u sredini. Ako je površina tog dobivenog trokuta dvostruko veća od površine pojedinog romba, koliki je udio površine jednog trapeza u površini polaznog trokuta?

Rješenje.

Označimo točke kao na slici.



Da bi likovi $AC_1A_0B_2$, $BA_1B_0C_2$ i $CB_1C_0A_2$ bili rombovi, mora biti $|AC_1| = |C_2B| = |BA_1| = |A_2C| = |CB_1| = |B_2A|$. 1 bod

Neka je $|AC_1| = x$. Površina romba jednaka je dvostrukoj površini jednakostraničnog trokuta stranice duljine x.

Tada je, prema uvjetu zadatka, površina jednakostraničnog trokuta $A_0B_0C_0$ jednaka četverostrukoj površini takvog trokuta. 1 bod

Iz ovoga zaključujemo da je duljina stranice trokuta $A_0B_0C_0$ jednaka $2x$. Dakle, $|A_0B_0| = 2x$. 1 bod

Kutovi uz osnovicu $\overline{C_1C_2}$ jednakokračnog trapeza $C_1C_2B_0A_0$ iznose $60°$, duljina kraka tog trapeza je x, a duljina kraće osnovice $2x$. Stoga se taj trapez može rastaviti na paralelogram i jednakostraničan trokut (odnosno na 5 jednakostraničnih trokuta stranice duljine x). Dakle, duljina dulje osnovice tog trapeza je $\overline{C_1C_2} = 3x$, 2 boda

a duljina stranice polaznog trokuta je $|AB| = 5x$. 1 bod

Površina trokuta ABC je 25 puta veća od površine jednakostraničnog trokuta stranice duljine x. 1 bod

Površina pojedinog trapeza jednaka je peterostrukoj površini jednakostraničnog trokuta stranice duljine x. 2 boda

Stoga udio površine trapeza u ukupnoj površini iznosi $1/5$, tj. 20%. 1 bod

Zadatak A-1.4.

Dokaži da jednadžba

$$x^2 = 2y^2 - 75y + 5$$

nema cjelobrojnih rješenja.

Rješenje.

Promatrat ćemo ostatke pri dijeljenju s 5. 1 bod

Najprije uočimo sljedeće: ako broj n daje ostatak 1, 2, 3 ili 4 pri dijeljenju s 5, onda n^2 pri dijeljenju s 5 daje ostatak 1, 4, 4 ili 1 redom.

To znači da lijeva strana promatrane jednakosti, koja glasi x^2, pri dijeljenju s 5 može dati ostatke 0, 1 ili 4. 1 bod

Na desnoj su strani dva pribrojnika djeljiva s 5, dok treći pribrojnik $2y^2$ može davati ostatke 0, $2 = 2 \cdot 1$ ili $3 = 2 \cdot 4 - 5$. 2 boda

Kako obje strane pri dijeljenju s 5 daju isti ostatak, jedina je mogućnost da je taj ostatak 0. Stoga su x i y djeljivi s 5. 3 boda

No, u tom je slučaju lijeva strana djeljiva s 25, a desna strana nije. 3 boda

Dakle, jednadžba nema rješenja.

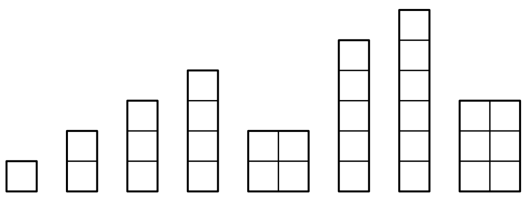
Zadatak A-1.5.

Pravokutnik dimenzija 5×6 podijeljen je na osam pravokutnika čije su stranice paralelne sa stranicama polaznog pravokutnika, a duljine stranica su im prirodni brojevi. Dokaži da su barem dva od tih osam pravokutnika međusobno sukladna.

Rješenje.

Dimenzije osam najmanjih pravokutnika s cjelobrojnim duljinama stranica su

$$1 \times 1, \quad 1 \times 2, \quad 1 \times 3, \quad 1 \times 4, \quad 2 \times 2, \quad 1 \times 5, \quad 1 \times 6, \quad 2 \times 3.$$ 3 boda



Zbroj njihovih površina iznosi

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 = 31,$$ 3 boda

a dani pravokutnik ima površinu 30. Stoga je nemoguće podijeliti dani pravokutnik na osam nesukladnih pravokutnika s cjelobrojnim duljinama stranica. 4 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2013.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve realne brojeve a takve da postoji kompleksni broj z za koji vrijedi

$$|z| = 1 \qquad \text{i} \qquad |az - 1| = a\,|z + 1|\,.$$

Prvo rješenje.

Ako je $a < 0$ iz druge jednakosti zaključujemo da mora biti $|z+1| = |az-1| = 0$, a to znači $z = -1$ i $a = -1$. Kako je i prva jednakost tada ispunjena, $a = -1$ je jedan od traženih brojeva. 1 bod

Za $a = 0$ druga jednakost nema rješenja.

Ako je $a > 0$, onda iz druge jednakosti slijedi

$$|az - 1| = |az + a|\,. \qquad (*)$$

Kako je $|w|^2 = w \cdot \overline{w}$ za $w \in \mathbb{C}$, jednakost $(*)$ je ekvivalentna s

$$(az-1)\,(a\overline{z}-1) = (az+a)\,(a\overline{z}+a) \qquad \text{2 boda}$$

$$a^2 z\overline{z} - az - a\overline{z} + 1 = a^2 z\overline{z} + a^2 z + a^2\overline{z} + a^2$$

$$(a^2+a)(z+\overline{z}) = 1 - a^2$$

Odavde dobijemo $z + \overline{z} = \dfrac{1-a^2}{a(a+1)}$, jer je $a \neq 0$, $a \neq -1$. 1 bod

Kako je $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, zaključujemo da je $\operatorname{Re} z = \dfrac{1-a^2}{2a(a+1)} = \dfrac{1-a}{2a}$. 2 boda

Da bi postojao takav kompleksan broj z, za koji uz to vrijedi $|z| = 1$, nužno je i dovoljno da vrijedi $-1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$, tj.

$$-1 \leqslant \frac{1-a}{2a} \leqslant 1. \qquad \text{2 boda}$$

Odavde, zbog $a > 0$, dobivamo $a \geqslant \dfrac{1}{3}$. 2 boda

Konačno, traženi brojevi su svi $a \in \{-1\} \cup \left[\dfrac{1}{3}, \infty\right\rangle$.

Drugo rješenje.

Ako je $a < 0$ iz druge jednakosti zaključujemo da mora biti $|z+1| = |az-1| = 0$, a to znači $z = -1$ i $a = -1$. Kako je i prva jednakost tada ispunjena, $a = -1$ je jedan od traženih brojeva. 1 bod

Za $a = 0$ druga jednakost nema rješenja, pa pretpostavimo da je $a > 0$.

Neka je $z = x + yi$ pri čemu su $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je druga jednakost ekvivalentna s

$$(ax-1)^2 + a^2y^2 = a^2(x+1)^2 + a^2y^2.$$ 2 boda

Sređivanjem dobivamo $2ax + 2a^2x = 1 - a^2$ 1 bod

odnosno $2ax(1+a) = (1-a)(1+a)$.

Kako je a nenegativan, pa posebno i različit od -1, jednakost možemo podijeliti s $a+1$ i dobivamo

$$x = \frac{1-a}{2a}.$$ 2 boda

Kompleksan broj $z = x + iy$ koji zadovoljava uvjet $|z| = 1$ postoji ako i samo ako je $1 \geqslant x^2$, tj. samo ako je

$$1 \geqslant \frac{(1-a)^2}{4a^2}.$$ 2 boda

Ova nejednažba je ekvivalentna s $3a^2 + 2a - 1 \geqslant 0$, tj. $(3a-1)(a+1) \geqslant 0$. 1 bod

Zbog prethodnih opaski zaključujemo da su traženi brojevi svi $a \in \{-1\} \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right\rangle$. 1 bod

Zadatak A-2.2.

Dokaži da jednadžba

$$3x^4 + 2013 = 25y^2 - 24x^2$$

nema cjelobrojnih rješenja.

Rješenje.

Napišimo danu jednadžbu u obliku

$$3x^4 + 24x^2 - 25y^2 + 2013 = 0.$$

Kako su svi pribrojnici osim $25y^2$ djeljivi s 3, i $25y^2$ mora biti djeljiv s 3, 2 boda

pa i y mora biti djeljiv s 3. Neka je $y = 3y_1$. Nakon dijeljenja s 3 promatrana jednadžba postaje

$$x^4 + 8x^2 - 75y_1^2 + 671 = 0.$$ 2 boda

Promotrimo ostatak pri dijeljenju izraza na lijevoj strani s 3.

Ako je x djeljiv s 3, onda su svi pribrojnici osim 671 djeljivi s 3, što je nemoguće. 1 bod

Ako x nije djeljiv s 3, onda njegov kvadrat daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, a isto vrijedi i za njegovu četvrtu potenciju. 2 boda

To znači da je $x^4 + 8x^2$ $(\equiv 1 + 8 \cdot 1 \equiv 0 \pmod 3)$ djeljivo s 3. 2 boda

I u ovom slučaju je $x^4 + 8x^2 + 75y_1^2$ djeljivo s 3, a 671 nije djeljivo s 3. 1 bod

Stoga dana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Zadatak A-2.3.

U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=24.$$

Prvo rješenje.

Uočimo da je dana jednadžba ekvivalentna sustavu

$$\begin{cases} x+y=1 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=24 \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe kvadriranjem dobivamo $x^2+y^2=1-2xy$,

a iz druge jednadžbe slijedi $x^2+y^2=24x^2y^2$. 3 boda

Stoga je $24(xy)^2+2(xy)-1=0$, a rješavanjem te kvadratne jednadžbe po xy dobivamo

$$xy=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 24}}{2\cdot 24}=\frac{-2\pm 10}{48}$$

tj. $xy=-\frac{1}{4}$ ili $xy=\frac{1}{6}$. 3 boda

Ako je $xy=-\frac{1}{4}$, zbog $x+y=1$ zaključujemo da su x i y rješenja jednadžbe

$x^2-x-\dfrac{1}{4}=0$, dakle $x_1=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. 2 boda

Analogno, ako je $xy=\frac{1}{6}$, onda su x i y rješenja jednadžbe $x^2-x+\dfrac{1}{6}=0$, dakle

$x_3=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$, $x_4=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$. 2 boda

Svaki od tih brojeva je rješenje dane jednadžbe.

Drugo rješenje.

Uočimo da vrijedi

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)^2-\frac{2}{x(1-x)}=\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)^2-\frac{2}{x(1-x)}.$$ 3 boda

Stoga danu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)^2-\frac{2}{x(1-x)}=24$$

odnosno, uz supstituciju $t=\dfrac{1}{x(1-x)}$, kao kvadratnu jednadžbu $t^2-2t-24=0$.

Rješenja te jednadžbe su $t=-4$ i $t=6$, 3 boda

pa preostaje riješiti jednadžbe

$$x(1-x)=-\frac{1}{4}\qquad \text{i} \qquad x(1-x)=\frac{1}{6}.$$

Rješenja su $x_1=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ 2 boda

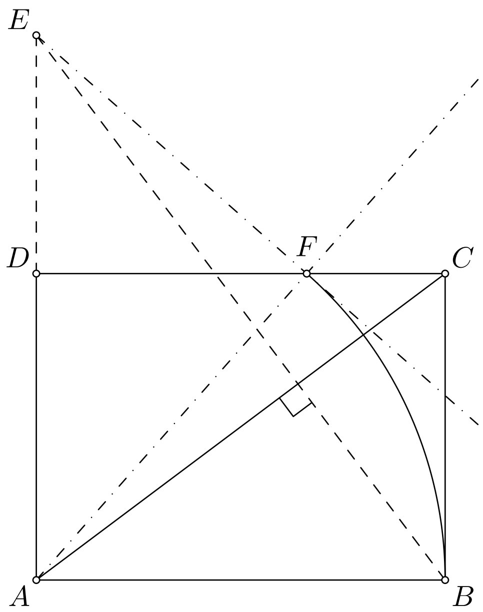
odnosno $x_3=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$, $x_4=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$. 2 boda

Zadatak A-2.4.

Dužina $\overline{AB}$ je dulja stranica pravokutnika $ABCD$. Okomica iz vrha B na dijagonalu $\overline{AC}$ siječe pravac AD u točki E, a kružnica sa središtem A koja prolazi kroz točku B siječe $\overline{CD}$ u točki F. Dokaži da su pravci AF i EF međusobno okomiti.

Rješenje.

Neka je $|AB| = a$, $|AD| = b$.



Zbog sličnosti pravokutnih trokuta EAB i ABC (sukladni kutovi s okomitim kracima) vrijedi $|EA| : |AB| = |AB| : |BC|$ pa je $|EA| = \dfrac{a^2}{b}$. 3 boda

Kako je $|AF| = a$, iz pravokutnog trokuta ADF prema Pitagorinom teoremu dobivamo $|DF|^2 = a^2 - b^2$. 1 bod

Sada iz pravokutnog trokuta EDF slijedi

$$
\begin{aligned}
|EF|^2 = |ED|^2 + |DF|^2 &= \left(\frac{a^2}{b} - b\right)^2 + \left(a^2 - b^2\right) && \text{2 boda} \\
&= \frac{\left(a^2 - b^2\right)^2}{b^2} + a^2 - b^2 = \frac{a^4}{b^2} - 2a^2 + b^2 + a^2 - b^2 \\
&= \frac{a^4}{b^2} - a^2 && \text{1 bod}
\end{aligned}
$$

Konačno, vrijedi

$$|EF|^2 + |AF|^2 = \left(\frac{a^4}{b^2} - a^2\right) + a^2 = \frac{a^4}{b^2} = |AE|^2, \qquad \text{2 boda}$$

što znači da je trokut AEF pravokutan i $AF \perp EF$. 1 bod

Zadatak A-2.5.

Ivica je od n^3 jediničnih kockica sastavio veliku kocku brida duljine n i zatim je neke od šest strana velike kocke obojao, a neke nije. Kada je rastavio veliku kocku, otkrio je da točno 1000 jediničnih kockica nema niti jednu obojanu stranu. Pokaži da je to zaista moguće i odredi broj strana velike kocke koje je Ivica obojao.

Rješenje.

Nakon bojanja nekih strana kocke sastavljene od n^3 kockica, broj neobojenih kockica je sigurno manji od n^3 i veći od $(n-2)^3$.

Dakle, $(n-2)^3 < 1000 < n^3$, pa mora biti $(n-1)^3 = 10^3$, tj. $n = 11$. 2 boda

Prebrojimo sada neobojene kockice u svim slučajevima, ovisno o broju obojenih strana velike kocke.

Ako je obojena 1 strana velike kocke, broj neobojenih kockica je $11 \cdot 10 \cdot 10 = 1210$. 1 bod

Ako su obojene 2 strane velike kocke, neobojenih kockica ima $11 \cdot 10 \cdot 10 = 1100$ (u slučaju da su obojene strane susjedne) ili $11 \cdot 11 \cdot 9 = 1089$ (u slučaju da obojene strane nisu susjedne). 1 bod

Ako su obojene 3 strane velike kocke, neobojenih kockica može biti $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ (ako sve tri obojene strane imaju zajednički vrh) ili $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ (ako te tri obojene strane nemaju zajednički vrh). 1 bod

Ako su obojene 4 strane velike kocke, neobojenih kockica je $10 \cdot 10 \cdot 9 = 900$ (ako su dvije neobojene strane susjedne) ili $11 \cdot 9 \cdot 9 = 891$ (ako dvije neobojene strane nisu susjedne). 1 bod

Ako je obojano 5 strane velike kocke, neobojenih kockica je $10 \cdot 9 \cdot 9 = 810$. 1 bod

Vidimo da je jedino u slučaju kad su obojene tri strane velike kocke moguće postići da broj neobojenih jediničnih kockica bude 1000, pa zaključujemo da je Ivica obojao tri strane velike kocke. 3 boda

Napomena: Nije nužno izračunati točan broj obojanih kockica u svakom slučaju, već eliminirati pojedine slučajeve.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2013.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

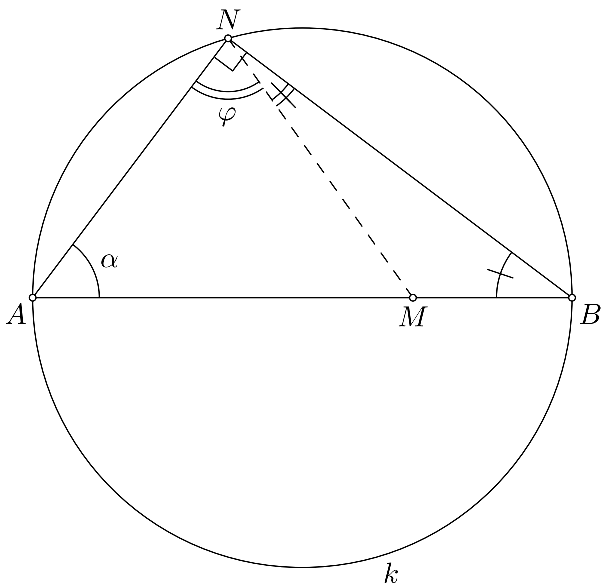
Dane su tri kolinearne točke A, B i M, takve da je M između A i B, te kružnica k čiji je promjer $\overline{AB}$. Neka je N bilo koja točka na kružnici k, različita od A i B. Dokaži da je vrijednost izraza

$$\frac{\operatorname{tg}(\sphericalangle ANM)}{\operatorname{tg}(\sphericalangle MAN)}$$

konstantna, tj. da ne ovisi o odabiru točke N.

Rješenje.

Neka je $\sphericalangle BAN = \alpha$ i $\sphericalangle ANM = \varphi$.



Promatrani izraz je

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha} &= \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\\ &= \frac{\sin\varphi}{\sin(90^\circ-\varphi)}\cdot\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin\alpha} && \text{1 bod}\\ &= \frac{\sin\varphi}{\sin(\sphericalangle BNM)}\cdot\frac{\sin(\sphericalangle ABN)}{\sin\alpha}. && \text{3 boda}\end{aligned}$$

Pritom smo koristili da je trokut ABN pravokutan (Talesov teorem).

Dobiveni izraz možemo pisati u obliku

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(\sphericalangle ABN)}{\sin(\sphericalangle BNM)}.$$

Primjenom poučka o sinusima na trokut ANM dobivamo

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}=\frac{|AM|}{|MN|}$$ 2 boda

a primjenom na trokut BMN

$$\frac{\sin(\sphericalangle ABN)}{\sin(\sphericalangle BNM)}=\frac{|MN|}{|BM|}.$$ 2 boda

Stoga je

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(\sphericalangle ABN)}{\sin(\sphericalangle BNM)}=\frac{|AM|}{|MN|}\cdot\frac{|MN|}{|BM|}=\frac{|AM|}{|BM|}$$ 2 boda

a to očito ne ovisi o položaju točke N.

Zadatak A-3.2.

Neka je n složen prirodni broj i neka su $d_1, d_2, \ldots, d_m$ svi njegovi djelitelji. Dokaži da vrijedi jednakost

$$\frac{2}{\log n^m}\sum_{k=1}^{m}\log d_k = 1.$$

Rješenje.

Uočimo da djelitelje broja n možemo grupirati u parove čiji je umnožak broj n. 1 bod

Bez smanjenja općenitosti neka je $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_m = n$. Tako možemo napisati m jednakosti

$$d_1 d_m = n, \quad d_2 d_{m-1} = n, \quad \ldots \quad d_k d_{m+1-k} = n, \quad \ldots \quad d_m d_1 = n.$$ 2 boda

Množenjem svih ovih jednakosti dobivamo

$$d_1^2 d_2^2 \ldots d_m^2 = n^m. \qquad (*)$$ 3 boda

Računamo

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{m}\log d_k &= 2\left(\log d_1 + \log d_2 + \ldots + \log d_m\right)\\ &= 2\log\left(d_1 d_2 \ldots d_m\right)\\ &= \log\left(d_1^2 d_2^2 \ldots d_m^2\right)\end{aligned}$$ 2 boda

Zbog $(*)$ konačno dobivamo $2\sum_{k=1}^{m}\log d_k = \log n^m$ čime je tvrdnja dokazana. 2 boda

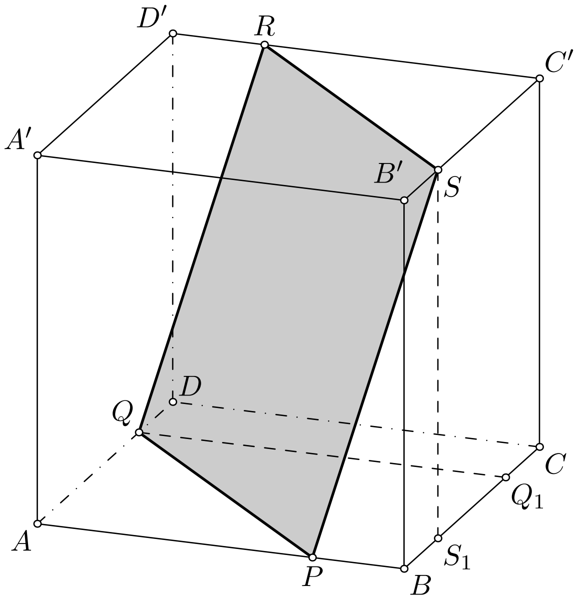
Zadatak A-3.3.

Dana je kocka $ABCDA'B'C'D'$ brida duljine 1. Na njenim bridovima $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{C'D'}$ i $\overline{B'C'}$ odabrane su redom točke P, Q, R i S tako da je $PQRS$ kvadrat sa središtem u središtu dane kocke. Kolika je duljina stranice tog kvadrata?

Rješenje.

Točke A, P, Q su centralno simetrične obzirom na središte kocke redom točkama C', R, S. Zbog toga je $|AP| = |C'R|$, $|AQ| = |C'S|$. 1 bod

Označimo $|AP| = |C'R| = x$, $|AQ| = |C'S| = y$, $|PQ| = |QR| = |RS| = |SP| = a$.



U pravokutnom trokutu APQ vrijedi

$$a^2 = x^2 + y^2. \tag{1}$$ 1 bod

Označimo s Q_1 i S_1 redom ortogonalne projekcije točaka Q i S na brid $\overline{BC}$.

Tada je PS dijagonala kvadra kojem su P, B i S_1 tri vrha donje baze, a visina mu je $\overline{SS_1}$. Zato vrijedi $a^2 = |PS|^2 = |PB|^2 + |BB'|^2 + |B'S|^2$, tj.

$$a^2 = (1-x)^2 + 1 + (1-y)^2 \tag{2}$$ 2 boda

Nadalje, $\overline{QS}$ je dijagonala kvadra kojem su Q, Q_1 i S_1 tri vrha donje baze, a visina mu je $\overline{SS_1}$. Budući da je $|Q_1S_1| = 1 - (1-y) - (1-y) = 2y - 1$, 1 bod

vrijedi

$$2a^2 = |QS|^2 = |QQ_1|^2 + |Q_1S_1|^2 + |S_1S|^2 = 1 + (2y-1)^2 + 1. \tag{3}$$ 2 boda

Izjednačavajući a^2 u (1) i (2) dobivamo $2x + 2y = 3$. 1 bod

Zato vrijedi $a^2 = \left(\frac{3}{2} - y\right)^2 + y^2$ i uvrštavanjem u (3) dobivamo

$$2\left(\frac{3}{2} - y\right)^2 + 2y^2 = 2 + (2y-1)^2$$

odakle nakon sređivanja dobivamo $4y = 3$, tj. $y = \dfrac{3}{4}$. 1 bod

Sada odmah slijedi $x = \dfrac{3}{2} - y = \dfrac{3}{4}$, te konačno $a = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. 1 bod

Napomena: Ako učenik ne argumentira ispravno zašto je $x = y$, ali pod tom pretpostavkom riješi zadatak treba mu dodijeliti 6 bodova.

Zadatak A-3.4.

Dokaži da je broj $\cos \dfrac{\pi}{2 \cdot 3^n}$ iracionalan za svaki prirodni broj n.

(Realni broj je iracionalan ako ga nije moguće prikazati kao omjer dvaju cijelih brojeva.)

Rješenje.

Vrijedi

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \qquad \text{1 bod}$$

pa je

$$\cos \frac{\pi}{2 \cdot 3^{n-1}} = 4\cos^3 \frac{\pi}{2 \cdot 3^n} - 3\cos \frac{\pi}{2 \cdot 3^n}. \qquad (*) \qquad \text{2 boda}$$

Za $n = 1$, broj $\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ je iracionalan. 2 boda

Pretpostavimo da nisu svi brojevi oblika $\cos \dfrac{\pi}{2 \cdot 3^n}$ iracionalni. Neka je $n \in \mathbb{N}$ najmanji broj takav da je $\cos \dfrac{\pi}{2 \cdot 3^n}$ racionalan. 3 boda

Tada iz jednakosti $(*)$ slijedi da je broj $\cos \dfrac{\pi}{2 \cdot 3^{n-1}}$ također racionalan što je u kontradikciji s pretpostavkom o minimalnosti broja n. 2 boda

Napomena: Alternativno je moguće formulirati argument induktivno. Pretpostavimo li da je $\cos \frac{\pi}{2 \cdot 3^k}$ iracionalan broj za $1 \leqslant k \leqslant n-1$ tada zbog jednakosti $(*)$ nije moguće da je $\cos \frac{\pi}{2 \cdot 3^n}$ racionalan jer bismo dobili kontradikciju. Potpuna ili nepotpuna rješenja matematičkom indukcijom treba bodovati u skladu s bodovnom shemom.

Zadatak A-3.5.

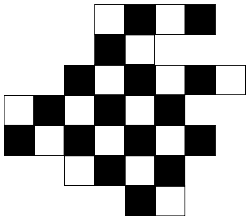
Polja jedinične kvadratne mreže velikih dimenzija obojana su naizmjenično crno i bijelo, poput šahovske ploče. Iz te mreže izrezan je poligon čije stranice leže na linijama kvadratne mreže.

Neka se taj poligon sastoji od B bijelih i C crnih polja, a njegov rub od b bijelih i c crnih jediničnih dužina. Dokaži da vrijedi $c - b = 4(C - B)$.

Prvo rješenje.

Nazovimo *unutrašnjima* one jedinične dužine koje su stranice nekog kvadratića poligona, ali nisu na rubu poligona. 2 boda

Neka je u broj unutrašnjih dužina. Dokažimo da je $c + u = 4C$. 3 boda



Na dva načina brojimo jedinične dužine koje su ujedno stranice crnih kvadratića. 1 bod

Broj svih takvih dužina je $4C$ jer svaki kvadratić ima 4 stranice, a nikoja dužina šahovske ploče nije istovremeno stranica dva različita crna kvadratića. 1 bod

S druge strane, svaka takva dužina je ili unutrašnja dužina ili crna dužina ruba poligona. 1 bod

Zato je ukupan broj unutrašnjih dužina i crnih dužina ruba jednak broju stranica svih crnih polja, tj. $c + u = 4C$.

Analogno, $b + u = 4B$. Oduzimanjem slijedi $4(C - B) = (c + u) - (b + u) = c - b$. 2 boda

Drugo rješenje.

Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom po broju polja poligona. 1 bod

Ako se poligon sastoji samo od jednog polja razlikujemo dva slučaja - to polje je crno ili bijelo. U prvom slučaju je $C = 1$, $c = 4$, $B = 0$, $b = 0$, a drugom $B = 1$, $b = 4$, $C = 0$, $c = 0$ pa tvrdnja u oba slučaja vrijedi. 1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki poligon P i dokažimo da tada tvrdnja vrijedi za svaki poligon P' koji možemo dobiti dodavanjem jednog polja poligonu P.

Označimo s C', B', c', b' redom brojeve crnih polja, bijelih polja, crnih rubnih dužina i bijelih rubnih dužina poligona P'. Koristeći tvrdnju $4(C - B) = c - b$ želimo dokazati da je $4(C' - B') = c' - b'$.

Ako je poligon P' dobiven dodavanjem crnog polja, onda je $C' = C + 1$ i $B' = B$. 2 boda

Svi susjedi tog crnog polja su bijela polja. Neka je k broj stranica tog crnog polja koje su na rubu poligona (k može biti 0, 1, 2 ili 3). Dodavanjem tog crnog polja na rubu se pojavilo k crnih dužina, a izgubili smo $4 - k$ bijelih dužina, tj. $c' = c + k$ i $b' = b - (4 - k)$. 3 boda

Zato je $4(C'-B') = 4(C+1-B) = 4(C-B)+4 = c-b+4 = (c'-k)-(b'+4-k)+4 = c' - b'$, što je i trebalo dokazati. 2 boda

Analogno (zamjenom uloga bijele i crne boje) dokazujemo tvrdnju u slučaju da je P' dobiven dodavanjem bijelog polja poligonu P. Time je proveden korak indukcije i slijedi tvrdnja zadatka. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2013.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi

$$\lfloor \sqrt[4]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{2} \rfloor + \ldots + \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor = \frac{3}{2}n + 1.$$

($\lfloor x \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji nije veći od x.)

Rješenje.

Neka je

$$a_n = \lfloor \sqrt[4]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{2} \rfloor + \ldots + \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor.$$

Trebamo riješiti jednadžbu

$$a_n = \frac{3}{2}n + 1. \qquad (*)$$

Primjetimo da je $\lfloor \sqrt[4]{k} \rfloor = 1$ za $1 \leqslant k < 16$. 1 bod

Zato za $1 \leqslant n \leqslant 15$ vrijedi $a_n = n$.

Među tim brojevima nema brojeva za koje vrijedi dana jednakost. 1 bod

Jednakost $\lfloor \sqrt[4]{k} \rfloor = 2$ vrijedi za $16 \leqslant k < 81$. 1 bod

Zato za $16 \leqslant n \leqslant 80$ vrijedi $a_n = 1+1+\ldots+1+2+\ldots+2 = 15+2\cdot(n-15) = 2n-15$.
1 bod

Da bi za $16 \leqslant n \leqslant 80$ vrijedila jednakost $(*)$ mora biti $2n - 15 = \frac{3}{2}n + 1$. 1 bod

Dobivamo jedno rješenje $n = 32$ i to je jedino rješenje zadatka manje od 81. 2 boda

Drugih (većih) rješenja nema, jer nakon $n = 81$ s porastom broja n za 1, vrijednost lijeve strane se povećava za najmanje 3, a vrijednost na desnoj strani za $\frac{3}{2}$, pa će lijeva strana ostati veća od desne. 3 boda

Zadatak A-4.2.

Točno tri unutrašnja kuta konveksnog mnogokuta su tupa. Koliko najviše stranica može imati taj mnogokut?

Prvo rješenje.

Zbroj vanjskih kutova konveksnog mnogokuta je $360°$. 1 bod

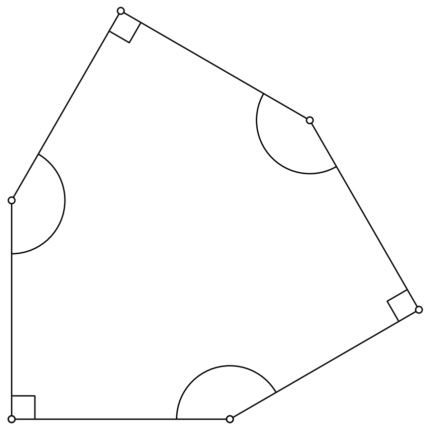
Tri vanjska kuta promatranog mnogokuta su šiljasta (uz tupe unutrašnje kutove), dok svi ostali vanjski kutovi moraju biti tupi ili pravi. 2 boda

Najviše tri vanjska kuta mogu biti tupi ili pravi, jer bi inače njihov zbroj bio $360°$ ili veći, što je nemoguće. 2 boda

To znači da su najviše tri unutrašnja kuta šiljasta ili prava, pa promatrani mnogokut ima najviše šest vrhova. 2 boda

Još treba provjeriti da postoji šesterokut s opisanim svojstvom.

Jedan takav je šesterokut čiji su kutovi redom $90°$, $150°$, $90°$, $150°$, $90°$, $150°$, a sve stranice sukladne. 3 boda



Time smo pokazali da je najveći mogući broj stranica mnogokuta s navedenim svojstvom 6.

Drugo rješenje.

Označimo s $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ kutove danog mnogokuta, bez obzira na poredak vrhova, ali tako da su α_1, α_2, α_3 tupi kutovi, a za sve ostale vrijedi $\alpha_k \leqslant 90°$.

U mnogokutu s n vrhova suma kutova je $(n-2) \cdot 180°$. 1 bod

Zbog pretpostavke je

$$\alpha_4 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_n \leqslant (n-3) \cdot 90°$$ 2 boda

te vrijedi

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 3 \cdot 180°.$$ 2 boda

Sada zaključujemo da je

$$\begin{aligned}(n-2) \cdot 180° &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_n \\ &< 3 \cdot 180° + (n-3) \cdot 90°\end{aligned}$$

odakle dijeljenjem s $90°$ dobivamo $2(n-2) < 3 \cdot 2 + n - 3$ tj. $n < 7$. Dakle, takav mnogokut s više od 6 vrhova ne postoji. 2 boda

Preostaje još provjeriti da postoji šesterokut s opisanim svojstvom, npr. primjerom kao u prvom rješenju. 3 boda

Zadatak A-4.3.

Dokaži da je broj čiji se dekadski zapis sastoji od 2187 znamenki 1 djeljiv s 2187.

Rješenje.

Primijetimo da je $2187 = 3^7$. 1 bod

Matematičkom indukcijom ćemo dokazati općenitu tvrdnju:
Broj čiji se dekadski zapis sastoji od 3^n znamenki 1 djeljiv je s 3^n. 2 boda

Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi, jer je $111 = 3 \cdot 37$. 1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$, tj. da je broj $\underbrace{111\ldots11}_{3^n \text{ znamenaka}}$ djeljiv s 3^n.

Dokažimo da je broj $\underbrace{111\ldots11}_{3^{n+1} \text{ znamenaka}}$ djeljiv s 3^{n+1}.

Vrijedi

$$\underbrace{111\ldots11}_{3^{n+1}} = \underbrace{111\ldots11}_{3^n} \cdot 1\underbrace{00\ldots01}_{3^n}\underbrace{0\ldots01}_{3^n}.$$ 3 boda

Prvi faktor je po pretpostavci djeljiv s 3^n, a drugi faktor je djeljiv s 3 jer mu je zbroj znamenaka jednak 3. To znači da je umnožak djeljiv s 3^{n+1} što smo i htjeli pokazati. 3 boda

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve.

Zadatak A-4.4.

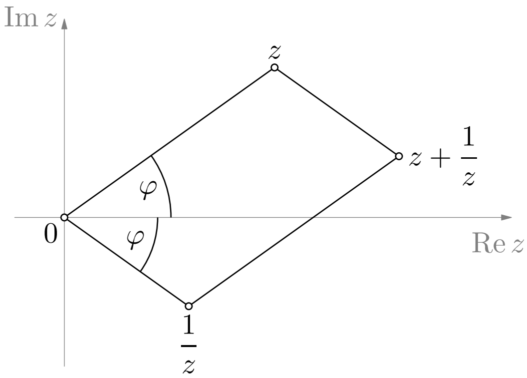
Četverokut s vrhovima 0, z, $\dfrac{1}{z}$ i $z+\dfrac{1}{z}$ u kompleksnoj ravnini ima površinu $\dfrac{35}{37}$. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^2$.

Rješenje.

Promatrani četverokut je paralelogram, jer je $z+\dfrac{1}{z}$ zbroj kompleksnih brojeva z i $\dfrac{1}{z}$. 1 bod

Neka je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonometrijski zapis kompleksnog broja z.

Tada je $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$. 1 bod



Kut između dvije stranice paralelograma iznosi 2φ, pa je njegova površina jednaka $|z|\cdot\dfrac{1}{|z|}\cdot\sin 2\varphi = \dfrac{35}{37}$, tj. $\sin 2\varphi = \dfrac{35}{37}$. 2 boda

Traženi izraz možemo transformirati na sljedeći način

$$\begin{aligned}\left|z+\frac{1}{z}\right|^2 &= \left(z+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)\\ &= z\overline{z}+\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}+\frac{1}{z\overline{z}} = r^2+\frac{1}{r^2}+2\frac{z^2+\overline{z}^2}{r^2}\\ &= r^2+\frac{1}{r^2}+2\cos 2\varphi.\end{aligned}$$ 3 boda

Iz $\sin 2\varphi = \dfrac{35}{37}$ slijedi $\cos 2\varphi = \pm\sqrt{1-\dfrac{35^2}{37^2}} = \pm\dfrac{12}{37}$. 1 bod

Kako je $r^2+\dfrac{1}{r^2} \geqslant 2$, 1 bod

traženi minimum je jednak $2 - 2\cdot\dfrac{12}{37} = \dfrac{50}{37}$. 1 bod

Napomena: Površina paralelograma ne ovisi o r već samo o φ. Postoje dvije vrijednosti kuta φ za koje je površina paralelograma jednaka zadanoj. Izraz čiji se minimum traži predstavlja kvadrat duljine dijagonale promatranog paralelograma, pa se do većine zaključaka može doći i geometrijskim razmatranjima.

Zadatak A-4.5.

U nekoj zemlji nalaze se tri grada A, B i C. Između svaka dva grada postoji nekoliko cesta (najmanje jedna) i sve ceste su dvosmjerne. Osim direktnih cestovnih veza između dvaju gradova postoje i indirektne. Indirektna cestovna veza između gradova X i Y sastoji se od ceste koja povezuje grad X s trećim gradom Z i ceste koja povezuje gradove Z i Y.

Poznato je da postoje ukupno 43 cestovne veze između gradova A i B, te ukupno 29 cestovnih veza između gradova B i C. Koliko ukupno može biti cestovnih veza između gradova A i C?

Rješenje.

Neka je x broj cesta između gradova B i C; y broj cesta između gradova C i A; z broj cesta između gradova A i B.

Tada je npr. broj indirektnih cestovnih veza između A i C (preko B) jednak $z \cdot x$. 1 bod

Sada uvjet zadatka možemo zapisati u obliku dviju jednadžbi:

$$xy + z = 43,$$
$$yz + x = 29.$$ 2 boda

Oduzimanjem ovih jednadžbi dobivamo $xy - yz + z - x = 43 - 29$ odnosno

$$(x - z)(y - 1) = 14.$$ 2 boda

Kako su x, y, z prirodni brojevi, dobivamo četiri mogućnosti

$x - z = 14$	$x - z = 7$	$x - z = 2$	$x - z = 1$
$y - 1 = 1$	$y - 1 = 2$	$y - 1 = 7$	$y - 1 = 14$

pa dalje slijedi

$y = 2$	$y = 3$	$y = 8$	$y = 15$	2 boda

Sada koristeći $xy + z = 43$ dobivamo sustave

$x - z = 14$	$x - z = 7$	$x - z = 2$	$x - z = 1$
$2x + z = 43$	$3x + z = 43$	$8x + z = 43$	$15x + z = 43$

U prvom slučaju je $x = 19$, $y = 2$, $z = 5$, a u trećem slučaju $x = 5$, $y = 8$, $z = 3$. U preostala dva slučaja rješenja nisu cjelobrojna. 2 boda

Ukupan broj cestovnih linija između A i C jednak je $xz + y$, pa može biti jednak 97 ili 23. 1 bod