ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2013.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1. Riješite nejednadžbu $\frac{9x+4}{5-x} \leq x$ i rješenje zapišite pomoću intervala.

Rješenje.

$$\frac{9x+4}{5-x} - x \leq 0$$

$$\frac{9x+4-5x+x^2}{5-x} \leq 0 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\frac{x^2+4x+4}{5-x} \leq 0 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\frac{(x+2)^2}{5-x} \leq 0 \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako je $(x+2)^2 \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, posljednja će nejednakost biti istinita ako je $5-x<0$ ili ako je $x=-2$, odnosno za $x>5$ ili $x=-2$. (2 boda)
Slijedi $x \in \langle 5, +\infty\rangle \cup \{-2\}$. (1 bod)

Zadatak B-1.2. Ako je $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$ i $\frac{a}{1}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0$, koliko je $\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{9}{c^2}$?

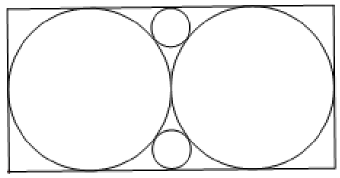
Rješenje.
Jednakost $\frac{a}{1}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0$ pišemo u obliku $2c+3b+6a=0$. (1 bod)
Jednakost $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$ kvadriramo:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{9}{c^2}+\frac{4}{ab}+\frac{6}{ac}+\frac{12}{bc}=1 \qquad \text{(2 boda)}$$

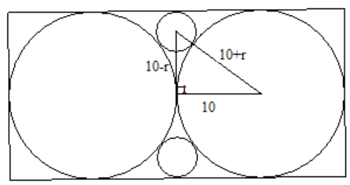
$$\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{9}{c^2}+\frac{4c+6b+12a}{abc}=1 \qquad \text{(2 boda)}$$

Kako je $4c+6b+12a=0$, slijedi
$\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{9}{c^2}=1.$ (1 bod)

Zadatak B-1.3. U pravokutnik su upisana dva mala i dva velika kruga kao na slici. Polumjer velikih krugova je 10 cm. Izračunajte površinu dijela pravokutnika koji nije prekriven krugovima.



Rješenje.



(Ako je učenik uočio pravokutni trokut i pridružio stranicama odgovarajuće vrijednosti) (1 bod)

$(10+r)^2 = (10-r)^2 + 10^2$ (1 bod)

$100 + 20r + r^2 = 100 - 20r + r^2 + 100$ (1 bod)

$40r = 100$

$r = 2.5$ cm (1 bod)

$P = 40 \cdot 20 - 2 \cdot 10^2\pi - 2 \cdot 2.5^2\pi = 800 - 212.5\pi \text{ cm}^2$. (2 boda)

Zadatak B-1.4. Ivo i Mate čiste cestu od snijega. Prvo je Ivo očistio $\frac{3}{5}$ ceste, a zatim je Mate očistio preostali dio tako da je cijela cesta bila očišćena za 12 sati. Za koliko bi sati zajedno očistili cestu ako se zna da bi Mati trebalo 5 sati više da očisti cestu sam nego da je Ivo očisti sam?

Rješenje.

Neka je x broj sati za koji bi Ivo očistio cestu sam.

Tada je $x+5$ broj sati za koje bi Mate očistio cestu sam. (1 bod)

Za čišćenje $\dfrac{3}{5}$ ceste Ivi je trebalo $\dfrac{3x}{5}$ sati, a za čišćenje preostale $\dfrac{2}{5}$ ceste Mati je trebalo $\dfrac{2(x+5)}{5}$ sati. (1 bod)

Kako je čišćenje završeno za 12 sati, vrijedi

$$\frac{3x}{5} + \frac{2(x+5)}{5} = 12. \quad \text{(1 bod)}$$

Odatle dobivamo $x = 10$,

Ivo može očistiti cestu za 10 sati, a Mate za 15 sati. (1 bod)

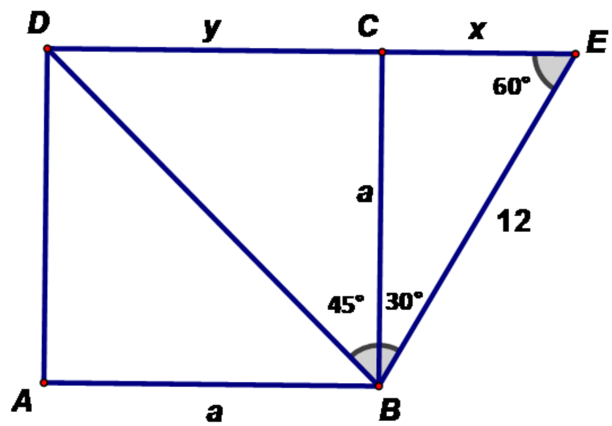
Zajedno bi za 1 sat očistili

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6} \quad \text{ceste.} \quad \text{(1 bod)}$$

Cijelu cestu bi zajedno očistili za 6 sati. (1 bod)

Zadatak B-1.5. Stranica BC kvadrata $ABCD$ ujedno je i kateta pravokutnog trokuta BCE kojemu duljina hipotenuze BE iznosi 12 cm. Dijagonala kvadrata BD i hipotenuza zatvaraju kut od $75°$. Izračunajte površinu trokuta DBE.

Rješenje.



Kako dijagonala kvadrata zatvara $45°$ sa stranicom kvadrata, kutovi pravokutnog trokuta su $30°$ i $60°$ te je on polovina jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine 12 cm. (skica) (1 bod)

Tada je duljina katete nasuprot kuta od $30°$ $x = 6$ cm. (1 bod)

Druga je kateta ujedno i stranica kvadrata i iznosi $a = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm. (1 bod)

$y = a = 6\sqrt{3}$ cm (1 bod)

$P = \dfrac{(x+y)\cdot a}{2}$

$P = \dfrac{(6+6\sqrt{3})\cdot 6\sqrt{3}}{2}$ (1 bod)

$P = 18\sqrt{3} + 54$

$P = 18(3+\sqrt{3})$ cm^2. (1 bod)

Zadatak B-1.6. Lovro ispisuje prirodne brojeve jedan iza drugog u nizu:

$$12345678910111213141516\ldots$$

itd. bez razmaka i znakova interpunkcija. Napisao je ukupno 2013 znamenaka. Koliko je puta pri tome napisao znamenku 7? Obrazložite svoj odgovor.

Rješenje.

Među 2013 napisanih znamenaka je 9 jednoznamenkastih brojeva, 90 dvoznamenkastih i x troznamenkastih brojeva.

Vrijedi $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + x \cdot 3 = 2013$. (2 boda)
Dobivamo $x = 608$, odnosno troznamenkastih je brojeva ukupno 608. (1 bod)
Zadnji napisani troznamenkasti broj je $99 + 608 = 707$. (1 bod)
Od zapisanog broja 1 do broja 99 znamenka 7 se na posljednjem mjestu pojavljuje 10 puta, a na prvom mjestu (u nizu od 70 do 79) također 10 puta, što je ukupno 20 puta. (2 boda)
Analogno će se i od zapisanog broja 100 do broja 199, od 200 do 299, od 300 do 399, ..., 600 do 699 znamenka 7 pojaviti 20 puta. (1 bod)
To znači da se do zapisanog broja 699 znamenka 7 pojavila $7 \cdot 20 = 140$ puta. (1 bod)
Od zapisanog broja 700 do broja 707 znamenka 7 se pojavljuje 9 puta. (1 bod)
Lovro je znamenku 7 ukupno napisao 149 puta. (1 bod)

Zadatak B-1.7. Za koje cijele brojeve p jednadžba

$$\frac{1}{(x-4)^2} - \frac{p-1}{16-x^2} = \frac{p}{(x+4)^2}$$

ima jedinstveno cjelobrojno rješenje?

Rješenje.

$$\frac{1}{(x-4)^2} - \frac{p-1}{16-x^2} = \frac{p}{(x+4)^2}$$

Uz uvjet da je $x \neq -4$ i $x \neq 4$, nakon množenja dane jednadžbe s $(x+4)^2(x-4)^2$ dobivamo

$$(x+4)^2 + (p-1)(x+4)(x-4) = p(x-4)^2 \qquad \text{(1 bod)}$$
$$x^2 + 8x + 16 + (p-1)(x^2 - 16) = p(x^2 - 8x + 16) \qquad \text{(1 bod)}$$
$$x^2 + 8x + 16 + px^2 - 16p - x^2 + 16 = px^2 - 8px + 16p$$
$$8x + 32 - 16p = -8px + 16p$$
$$8x(p+1) = 32p - 32$$
$$x(p+1) = 4p - 4 \qquad \text{(1 bod)}$$

Za $p \neq -1$ je $x = \dfrac{4p-4}{p+1}$. (2 boda)

$$x = \frac{4p-4}{p+1} = \frac{4p+4-8}{p+1} = 4 - \frac{8}{p+1} \qquad \text{(1 bod)}$$

Da bi rješenje x bilo cjelobrojno, $p+1$ mora dijeliti broj 8. Tada je
$p + 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$, odnosno (1 bod)
$p \in \{-9, -5, -3, -2, 0, 1, 3, 7\}$. (1 bod)
Zbog početnog uvjeta $x \neq -4$, $x \neq 4$, p ne smije biti jednak 0. (1 bod)
Konačno dobivamo $p \in \{-9, -5, -3, -2, 1, 3, 7\}$. (1 bod)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2013.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1. Koliko ima prirodnih brojeva $n < 2013$ za koje je

$$\left(i^{n}+i^{n+1}+i^{n+2}+\ldots+i^{n+2012}\right)^{2013}$$

prirodan broj?

Rješenje.

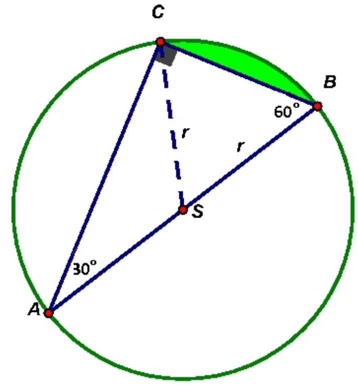
Pojednostavnimo dani izraz.

$$\begin{aligned}
\left(i^{n}+i^{n+1}+i^{n+2}+\ldots+i^{n+2012}\right)^{2013} &= i^{2013n}\left(i^{0}+i^{1}+i^{2}+i^{3}+\ldots+i^{2012}\right)^{2013} && \text{(1 bod)}\\
&= i^{2013n}(1+i-1-i+\ldots+1)^{2013} && \text{(2 boda)}\\
&= i^{2013n}(1)^{2013}=i^{n} && \text{(1 bod)}
\end{aligned}$$

i^n je prirodan broj ako je n djeljiv sa četiri, tj. oblika $n = 4k$, (1 bod)
a takvih je $2012 : 4 = 503$. (1 bod)

Zadatak B-2.2. Cvjetnjak kružnog oblika podijeljen je trima tetivama na četiri dijela. Tetive zatvaraju pravokutan trokut kojemu je jedan kut 30°. U svaki je dio posađena druga vrsta cvijeća – maćuhice, tulipani, narcise i ruže. U dio s najmanjom površinom posađene su ruže. Odredite koliku površinu zauzimaju ruže ako je duljina najmanje tetive $6\,\mathrm{m}$.

Rješenje.



(1 bod)

Kut pri vrhu B je 60°, a $|SB| = |SC| = r$ pa je trokut ΔSBC jednakostraničan i

$$r = |BC| = 6m.$$

$$\text{(Ili } \sin 30^\circ = \frac{a}{2r}, \text{ tj. } r = 6m.) \qquad \text{(2 boda)}$$

Kako je trokut ΔSBC jednakostraničan, površina odsječka nad katetom a jednaka je

$$\begin{aligned} P &= \frac{r^2\pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} \qquad \text{(2 boda)} \\ &= 6\pi - 9\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ruže zauzimaju površinu od $P = 3(2\pi - 3\sqrt{3})m^2$. (1 bod)

Zadatak B-2.3. Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} x + y + \sqrt{x+y} &= 6 \\ x - y + \sqrt{x-y} &= 2 \end{aligned}$$

Rješenje.

Neka je $x + y = a$, $x - y = b$. Dani sustav tada prelazi u

$$\begin{aligned} a + \sqrt{a} &= 6 \\ b + \sqrt{b} &= 2. \qquad \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Rješimo prvu jednadžbu sustava.

$$\begin{aligned} &\sqrt{a} = 6 - a \,/\,^2, \text{ uz uvjet } 6 - a \geq 0 \\ &a^2 - 13a + 36 = 0 \qquad \text{(1 bod)} \\ &a_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 36}}{2} \\ &a_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{2} \\ &a_1 = 9,\ a_2 = 4. \end{aligned}$$

Jedino rješenje $a = 4$ zadovoljava dani uvjet. (1 bod)
Rješimo drugu jednadžbu sustava:

$$\begin{aligned} &\sqrt{b} = 2 - b \,/\,^2, \text{ uz uvjet } 2 - b \geq 0 \\ &b^2 - 5a + 4 = 0 \qquad \text{(1 bod)} \\ &b_1 = 4, b_2 = 1. \end{aligned}$$

Provjerom uvjeta ostaje samo rješenje $b = 1$. (1 bod)
Preostaje još samo riješiti sustav

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Rješenje sustava je (2.5, 1.5). (1 bod)

Zadatak B-2.4. Odredite sve realne brojeve a takve da je $a(x^2+3)-x(x+2a)>2$ za svaki realni broj x.

Rješenje.

$$\begin{aligned} &ax^2+3a-x^2-2ax-2>0 \\ &x^2(a-1)-2ax+3a-2>0 \qquad (1 \text{ bod}) \end{aligned}$$

Ova će nejednakost biti ispunjena za sve realne brojeve x ako vrijedi

$$a-1>0 \text{ i } D<0. \qquad (2 \text{ boda})$$

Odatle je $a>1$ i

$$\begin{aligned} &4a^2-4(a-1)(3a-2)<0 \\ &-8a^2+20a-8<0 \\ &2a^2-5a+2>0. \qquad (1 \text{ bod}) \end{aligned}$$

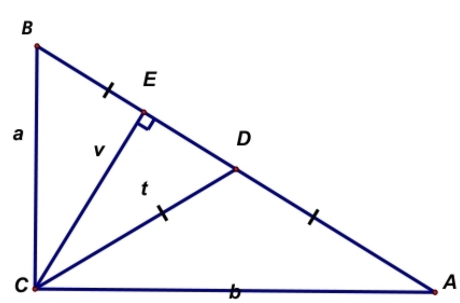
Rješenje ove nejednadžbe je

$$a \in \langle -\infty, \frac{1}{2} \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle. \qquad (1 \text{ bod})$$

Dakle, rješenje zadatka je $a \in \langle 2, +\infty \rangle$. (1 bod)

Zadatak B-2.5. U pravokutnom su trokutu iz vrha pravog kuta povučene visina i težišnica. Omjer njihovih duljina iznosi 12 : 13. Odredite u kojem su omjeru katete tog trokuta.

Rješenje.



Kako je $v : t = 12 : 13$, možemo pisati $v = 12k$, $t = 13k$, $k \in \mathbb{N}$. (1 bod)
U pravokutnom je trokutu težišnica jednaka polumjeru trokutu opisane kružnice, odnosno polovini duljine hipotenuze. (1 bod)
Stoga vrijedi $|AD| = |DB| = t = 13k$. Iz pravokutnog trokuta ΔCDE dobivamo

$$|DE| = \sqrt{(13k)^2 - (12k)^2} = 5k \qquad (1 \text{ bod})$$
$$|EB| = 13k - 5k = 8k \qquad (1 \text{ bod})$$

Vrijedi

$$b^2 = v^2 + |AE|^2 = (12k)^2 + (18k)^2 = 468k^2$$
$$a^2 = v^2 + |BE|^2 = (12k)^2 + (8k)^2 = 208k^2 \qquad (1 \text{ bod})$$

Tada je omjer kateta jednak

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{468k^2}{208k^2} = \frac{9}{4}$$
$$\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \text{ ili } b : a = 3 : 2. \qquad (1 \text{ bod})$$

Zadatak B-2.6. Odredite sve vrijednosti realnog parametra $p \neq 0$ tako da za rješenja jednadžbe $px(x+2) + 2p = 3$ vrijedi $|x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3| \geq 6$.

Rješenje.

Danu kvadratnu jednadžbu pišemo u obliku $px^2 + 2px + 2p - 3 = 0$. (1 bod)
Za njezina rješenja vrijede Vieteove formule:

$$x_1 + x_2 = -2, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{2p-3}{p}. \qquad (1 \text{ bod})$$

Napišimo zadanu nejednakost u pogodnom obliku.

$$|x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3| \geq 6$$
$$|x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)| \geq 6$$
$$|x_1 x_2 [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]| \geq 6 \qquad (1 \text{ bod})$$

Tada iz Vieteovih formula slijedi

$$\left|\frac{2p-3}{p} \cdot \left[(-2)^2 - 2 \cdot \frac{2p-3}{p}\right]\right| \geq 6$$
$$\left|\frac{2p-3}{p} \cdot \frac{6}{p}\right| \geq 6$$
$$\left|\frac{2p-3}{p^2}\right| \geq 1. \qquad (2 \text{ boda})$$

Slijedi

$$\frac{2p-3}{p^2} \geq 1 \text{ ili } \frac{2p-3}{p^2} \leq -1. \qquad (1 \text{ bod})$$

Tada je $p^2 - 2p + 3 \leq 0$ ili $p^2 + 2p - 3 \leq 0$. (1 bod)
Nejednadžba $p^2 - 2p + 3 \leq 0$ nema realnih rješenja. (1 bod)
Rješenje nejednadžbe $p^2 + 2p - 3 \leq 0$, uz uvjet zadatka da je $p \neq 0$ je skup $[-3, 1] \setminus \{0\}$. (2 boda)

Zadatak B-2.7. Tri biciklističke staze kojima je ukupna duljina 24 km tvore pravokutni trokut. Iz vrha pravog kuta istovremeno kreću dva biciklista konstantnim brzinama. Jedan vozi po jednoj, a drugi po drugoj stazi. Dok jedan biciklist prijeđe 5.5 km, drugi za to vrijeme prijeđe 6.5 km. Ako se biciklisti sastanu točno na sredini hipotenuze, koliko iznose duljine staza, odnosno stranica pravokutnog trokuta?

Rješenje.

Neka je a duljina staze po kojoj vozi jedan, a b duljina staze po kojoj vozi drugi biciklist. Duljina hipotenuze je c. Prvi je biciklist do trenutka susreta prešao $a + \frac{c}{2}$, a drugi $b + \frac{c}{2}$ kilometara. Kako su brzine konstantne, omjer prijeđenih putova je stalan i iznosi $\frac{5.5}{6.5}$. Pišemo

$$\frac{a + \frac{c}{2}}{b + \frac{c}{2}} = \frac{5.5}{6.5} = \frac{11}{13}. \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\begin{aligned} a + \frac{c}{2} &= 11k \qquad & a &= 11k - \frac{c}{2} \\ b + \frac{c}{2} &= 13k \qquad & b &= 13k - \frac{c}{2} \end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$

Iz opsega $a + b + c = 24$ slijedi $k = 1$. (1 bod)
Primjenom Pitagorinog poučka dobivamo

$$(11 - \frac{c}{2})^2 + (13 - \frac{c}{2})^2 = c^2 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$c^2 + 48c - 580 = 0$$

Pozitivno rješenje jednadžbe je $c = 10$. (2 boda)

Duljine staza su $a = 6$ km, $b = 8$ km, $c = 10$ km. (2 boda)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2013.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1. Riješite jednadžbu

$$\left(4-\frac{x}{2013}\right)^{10^{2013}}=\left(\frac{x}{671}\right)^{10^{2013}}.$$

Rješenje.

Broj 10^{2013} je paran. Tada vrijedi

$$4-\frac{x}{2013}=\frac{x}{671} \quad \text{ili} \quad 4-\frac{x}{2013}=-\frac{x}{671}$$ (2 boda)

Iz prve jednadžbe je $\frac{x}{3\cdot 671}+\frac{x}{671}=4$, odnosno

$$\frac{4x}{2013}=4\ , \quad x=2013$$ (2 boda)

Analogno iz druge jednadžbe dobivamo $\frac{-2x}{2013}=4$. (1 bod)

Odatle slijedi drugo rješenje $x=-4026$. (1 bod)

Dakle, rješenja jednadžbe su brojevi -4026 i 2013.

Zadatak B-3.2. Duljine stranica trokuta su tri uzastopna neparna broja, a mjera jednog kuta iznosi $\frac{2\pi}{3}$. Izračunajte duljine stranica tog trokuta.

Rješenje.

Neka je $a=2n-1$, $b=2n+1$, $c=2n+3$. (1 bod)

Kako je $\frac{2\pi}{3}$ tupi kut, njegova nasuprotna stranica je najveće duljine, a to je $c=2n+3$.

Iz kosinusovog poučka dobivamo

$$\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{(2n-1)^2+(2n+1)^2-(2n+3)^2}{2(2n-1)(2n+1)}.$$ (2 boda)

$$\frac{-1}{2}=\frac{4n^2-12n-7}{2(4n^2-1)}$$

$$8n^2-12n-8=0 \qquad n_{1,2}=\frac{3\pm 5}{4}$$ (1 bod)

Kako je $n > 0$, rješenje jednadžbe je $n = 2$. (1 bod)
Stranice trokuta su $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$. (1 bod)

Zadatak B-3.3. Koliko je $f\left(\frac{\pi}{32}\right)$ ako je $f(x) = \frac{\sin 12x}{\sin 4x} + \frac{\cos 12x}{\cos 4x}$?

Rješenje.
Pojednostavnimo izraz kojim je zadana funkcija f.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin 12x}{\sin 4x} + \frac{\cos 12x}{\cos 4x} = \frac{\sin 12x \cdot \cos 4x + \cos 12x \cdot \sin 4x}{\sin 4x \cos 4x} && \text{(1 bod)} \\ &= \frac{\sin 16x}{\frac{1}{2}\sin 8x} && \text{(2 boda)} \\ &= \frac{2 \cdot 2 \sin 8x \cos 8x}{\sin 8x} = 4\cos 8x && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Tada je

$$f\left(\frac{\pi}{32}\right) = 4\cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{32}\right) = 4\cos\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-3.4. Helena je na svoju rođendansku zabavu pozvala određen broj djece. Broj godina jednog djeteta iznosio je jednu osminu zbroja godina preostale djece. Taj se odnos godina nije mijenjao niti kasnijih godina. Koliko je djece bilo na zabavi?

Rješenje.
Neka je n broj djece na zabavi, a x broj godina spomenutog djeteta.
Nadalje, neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ godine preostalih $n-1$ djece. Tada vrijedi

$$x = \frac{1}{8}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) \quad (1) \qquad \text{(2 boda)}$$

Dodamo li svakom djetetu t godina, vrijedit će isti omjer, što zapisujemo kao

$$\begin{aligned} x + t &= \frac{1}{8}((x_1 + t) + (x_2 + t) + \cdots + (x_{n-1} + t)) \\ &= \frac{1}{8}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) + \frac{1}{8}(n-1)t \quad (2) && \text{(2 boda)} \end{aligned}$$

Iz (1) i (2) slijedi $t = \frac{1}{8}(n-1)t$, a odatle $n = 9$. (1 bod)

Na zabavi je bilo devetero djece. (1 bod)

Zadatak B-3.5. Riješite nejednadžbu $x\cos x - 1 < x - \cos x$.

Rješenje.

Nejednadžba se može zapisati u obliku $(x+1)(\cos x - 1) < 0$. (2 boda)

Kako je $\cos x \leq 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$, mora vrijediti

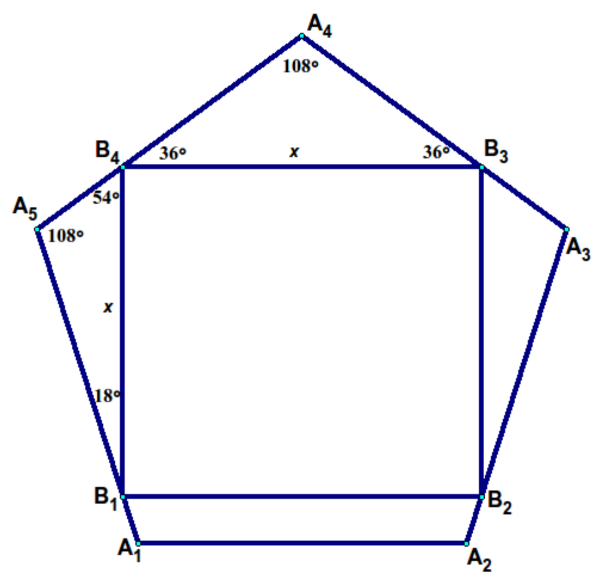
$x + 1 > 0$ i $\cos x \neq 1$. (2 boda)

Slijedi $x > -1$, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zato je rješenje nejednadžbe $x \in \langle -1, +\infty\rangle \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. (2 boda)

Zadatak B-3.6. U pravilni peterokut upisan je kvadrat tako da mu je jedna stranica paralelna s nekom stranicom peterokuta. Dokažite da je duljina stranice kvadrata jednaka $\dfrac{a \operatorname{ctg} 18^\circ}{1 + 2\cos 18^\circ}$ gdje je a duljina stranice peterokuta.

Rješenje.



Skica i jasno određeni kutovi (2 boda)

Primjenimo poučak o sinusu na trokut $B_1B_4A_5$

$$\frac{x}{\sin 108^\circ} = \frac{|A_5B_4|}{\sin 18^\circ}. \quad \text{(1 bod)}$$

U trokutu $B_3A_4B_4$ je $\dfrac{x}{\sin 108^\circ} = \dfrac{|A_4B_4|}{\sin 36^\circ}$. Tada je (1 bod)

$$a = |A_5B_4| + |B_4A_4| = \frac{x}{\sin 108^\circ}(\sin 18^\circ + \sin 36^\circ). \quad \text{(1 bod)}$$

Iz posljednje jednakosti izrazimo x i primijenimo formulu dvostrukog kuta na $\sin 36^\circ$. (1 bod)

$$x=\frac{a\sin 108^\circ}{\sin 18^\circ+\sin 36^\circ}$$

$$x=\frac{a\sin 108^\circ}{\sin 18^\circ+2\sin 18^\circ\cos 18^\circ} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$x=\frac{a\sin 108^\circ}{\sin 18^\circ(1+2\cos 18^\circ)}=\frac{a\sin(90^\circ+18^\circ)}{\sin 18^\circ(1+2\cos 18^\circ)} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$x=\frac{a\cos 18^\circ}{\sin 18^\circ(1+2\cos 18^\circ)} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$x=\frac{a\operatorname{ctg} 18^\circ}{1+2\cos 18^\circ} \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-3.7. Koju najveću vrijednost može imati površina trokuta kojemu je opseg 20 cm, a duljina jedne stranice 8 cm?

Prvo rješenje.

Neka je duljina stranice $b=8$ cm i $a+b+c=20$ cm. Površinu trokuta računamo po Heronovoj formuli

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s=\frac{o}{2}=10, \qquad \text{(1 bod)}$$

Iz opsega slijedi $c=20-8-a=12-a$. Tada je (1 bod)

$$P=\sqrt{10(10-a)(10-8)(a-2)} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$P=\sqrt{20(-a^2+12a-20)} \qquad \text{(2 boda)}$$

Ovaj će izraz imati najveću vrijednost za onu vrijednost od a za koju kvadratna funkcija $f(a)=-a^2+12a-20$ ima najveću vrijednost, a to je za $a=6$ cm, (2 boda)
Tada je i $c=6$ cm, a najveća površina (1 bod)
$P=8\sqrt{5}$ cm^2. (2 boda)

Drugo rješenje.

Površinu trokuta možemo računati prema formuli $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. (ili $P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$)

Kako je $a+b+c=20$, tada je $a+c=12$, odnosno $a=12-c$. (1 bod)
Koristeći poučak o kosinusu dobivamo $c^2=(12-c)^2+64-16(12-c)\cos\gamma$ ili

$$\cos\gamma=\frac{26-3c}{2(12-c)}\ ,\ \text{a} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\sin\gamma=\sqrt{1-\left(\frac{26-3c}{2(12-c)}\right)^2}=\frac{-5c^2+60c-100}{2(12-c)} \qquad \text{(2 boda)}$$

Tada je površina trokuta $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (12 - c) \sin \gamma = 2 \cdot \sqrt{-5c^2 + 60c - 100}$. (1 bod)
Analogno kao i u prvom rješenju, gledamo najveću vrijednost izraza

$$-5c^2 + 60c - 100$$

koja se postiže za $c = 6$ cm. (2 boda)
Tada je $a = 6$ cm i $P = 8\sqrt{5}$ cm^2. (3 boda)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2013.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1. Ani nedostaje 2900 eura za kupovinu novog automobila. Odlučila je štedjeti. Prvi je mjesec izdvojila od džeparca 50 eura. Svaki će naredni mjesec izdvajati 10 eura više. Koliko dugo Ana treba štedjeti da bi sakupila potreban iznos?

Rješenje.

Mjesečni iznosi štednje čine aritmetički niz čija je razlika 10, tj

$$a_1 = 50,\ d = 10,\ S_n = 2900. \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\frac{n}{2}[100 + (n-1)\cdot 10] = 2900 \qquad \text{(1 bod)}$$
$$n^2 + 9n - 580 = 0 \qquad \text{(1 bod)}$$
$$n_1 = -29,\ n_2 = 20 \qquad \text{(1 bod)}$$

Ana treba štedjeti 20 mjeseci. (1 bod)

Zadatak B-4.2. Mala poluos, linearni ekscentricitet i velika poluos elipse, tri su uzastopna člana aritmetičkog niza. Ako veliku poluos povećamo za 1 niz će postati geometrijski. Odredite jednadžbu elipse.

Rješenje.

Neka b, e, a čine aritmetički niz. Tada je:

$$2e = a + b, \qquad \text{(1 bod)}$$
$$e^2 = a^2 - b^2. \qquad \text{(1 bod)}$$

Iz prve jednakosti je $a = 2e – b$ te iz druge jednadžbe tada dobivamo

$$e = \frac{4b}{3} \text{ i } a = \frac{5b}{3}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada b, e, $a+1$ čine geometrijski niz, pa je

$$e^2 = b \cdot (a+1) \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno $(\frac{4b}{3})^2 = b \cdot (\frac{5b}{3} + 1)$.

Mala poluos je $b = 9$, a velika poluos je $a = 15$. (1 bod)
Jednadžba elipse je

$$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1 \qquad \text{(1 bod)}$$

.

Zadatak B-4.3. Koliko racionalnih članova ima u razvoju binoma $(\sqrt{2013} + \sqrt[3]{2013})^{2012}$?

Rješenje.

Opći član dan je formulom

$$\binom{2012}{k} 2013^{\frac{2012-k}{2}} \cdot 2013^{\frac{k}{3}} = \qquad \text{(1 bod)}$$
$$= \binom{2012}{k} 2013^{1006-\frac{k}{6}}$$

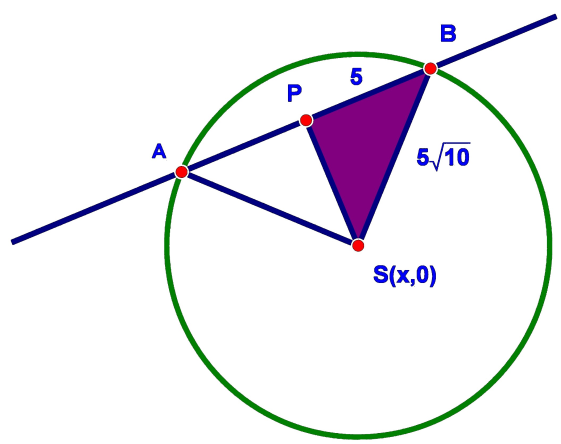
Eksponent $1006 - \frac{k}{6}$ mora biti prirodan broj ili 0. (2 boda)

Zato k mora biti oblika $k = 6n$, $0 \leq k \leq 2012$, $n \in \mathbb{N}_0$. (1 bod)

To su brojevi 0, 6, 12, 18,..., 2010. Oni čine aritmetički niz s razlikom 6.
Ima ih 336. (2 boda)

Zadatak B-4.4. Odredite jednadžbu kružnice kojoj je središte na osi apscisa, polumjer $5\sqrt{10}$, a na pravcu $3x - 4y + 24 = 0$ odsjeca tetivu duljine 10.

Rješenje.



(1 bod)

Po Pitagorinom poučku iz trokuta ΔBPS dobivamo $|PS| = 15$. (1 bod)
Udaljenost središta kružnice do pravca $3x - 4y + 24 = 0$ je 15. Pišemo

$$\left|\frac{3x+24}{5}\right| = 15. \quad \text{(1 bod)}$$

Tada je

$3x + 24 = 75$ ili $3x + 24 = -75$, odnosno (1 bod)

$x = 17$ ili $x = -33$. (1 bod)

Tražene kružnice su

$$(x-17)^2 + y^2 = 250$$
$$(x+33)^2 + y^2 = 250. \quad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-4.5. Odredite sve prirodne brojeve n za koje su istovremeno $2^n - 1$ i $2^n + 1$ prosti brojevi.

Rješenje.

Za $n = 1$ imamo $2^n - 1 = 1$ i $2^n + 1 = 3$, pa $n = 1$ nije rješenje jer 1 nije prost broj. (1 bod)

Za $n = 2$ imamo $2^n - 1 = 3$ i $2^n + 1 = 5$. (1 bod)

Neka je $n > 2$. Tada su brojevi $2^n - 1$, 2^n, $2^n + 1$ tri uzastopna prirodna broja od kojih je jedan sigurno djeljiv s 3. (2 boda)

Kako broj 2^n nije djeljiv s 3, mora biti djeljiv s 3 jedan od brojeva $2^n - 1$, $2^n + 1$ što znači da nisu oba prosti. (1 bod)

Dakle, jedino je rješenje $n = 2$. (1 bod)

Zadatak B-4.6. Riješite nejednadžbu

$$0.2^{\cos 2x} - \frac{1}{25^{\cos^2 x}} > 4 \cdot 125^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Rješenje.

$$5^{-\cos 2x} - 5^{-2\cos^2 x} > 4 \cdot 5^{-\frac{3}{2}}$$

$$5^{1-2\cos^2 x} - 5^{-2\cos^2 x} > 4 \cdot 5^{-\frac{3}{2}} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$5^{-2\cos^2 x} \cdot (5-1) > 4 \cdot 5^{-\frac{3}{2}}$$

$$5^{-2\cos^2 x} > 5^{-\frac{3}{2}} \qquad \text{(2 boda)}$$

$$-2\cos^2 x > -\frac{3}{2} \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\cos^2 x < \frac{3}{2} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$|\cos x| < \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(2 boda)}$$

Konačno rješenje je $x \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \rangle$. (2 boda)

Zadatak B-4.7. Vektori $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$ određuju paralelogram. Pri tome su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori, a mjera kuta kojeg $\vec{m}$ i $\vec{n}$ zatvaraju iznosi $\frac{\pi}{3}$. Odredite površinu paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje.

Površina paralelograma je $P = ab\sin\alpha$, (1 bod)
gdje je $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$ i $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Vrijedi da je $\vec{m}^2 = |\vec{m}|^2 = 1$, $\vec{n}^2 = |\vec{n}|^2 = 1$ i

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \qquad \text{(1 bod)}$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 = (2\vec{m} + \vec{n})^2 = 4\vec{m}^2 + 4\vec{m} \cdot \vec{n} + \vec{n}^2 = 4 + 2 + 1 = 7, \qquad \text{(1 bod)}$$

$$|\vec{b}|^2 = \vec{b}^2 = (\vec{m} - \vec{n})^2 = \vec{m}^2 - 2\vec{m} \cdot \vec{n} + \vec{n}^2 = 1 - 1 + 1 = 1, \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{m} + \vec{n})(\vec{m} - \vec{n}) = 2\vec{m}^2 - \vec{m} \cdot \vec{n} - \vec{n}^2 = 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}, \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{7} \cdot 1} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{28}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{14} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$P = ab\sin\alpha = \sqrt{7} \cdot 1 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$P = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \qquad \text{(2 boda)}$$