Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

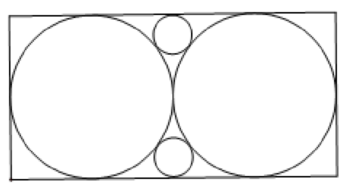
1. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2013.

1. (6) Riješite nejednadžbu $\dfrac{9x+4}{5-x} \leq x$ i rješenje zapišite pomoću intervala.

2. (6) Ako je $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1$ i $\dfrac{a}{1}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0$, koliko je $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{9}{c^2}$?

3. (6) U pravokutnik su upisana dva mala i dva velika kruga kao na slici. Polumjer velikih krugova je 10 cm. Izračunajte površinu dijela pravokutnika koji nije prekriven krugovima.



4. (6) Ivo i Mate čiste cestu od snijega. Prvo je Ivo očistio $\frac{3}{5}$ ceste, a zatim je Mate očistio preostali dio tako da je cijela cesta bila očišćena za 12 sati. Za koliko bi sati zajedno očistili cestu ako se zna da bi Mati trebalo 5 sati više da očisti cestu sam nego da je Ivo očisti sam?

5. (6) Stranica BC kvadrata $ABCD$ ujedno je i kateta pravokutnog trokuta BCE kojemu duljina hipotenuze BE iznosi 12 cm. Dijagonala kvadrata BD i hipotenuza zatvaraju kut od $75°$. Izračunajte površinu trokuta DBE.

6. (10) Lovro ispisuje prirodne brojeve jedan iza drugog u nizu:

$$12345678910111213141516\ldots$$

itd. bez razmaka i znakova interpunkcija. Napisao je ukupno 2013 znamenaka. Koliko je puta pri tome napisao znamenku 7? Obrazložite svoj odgovor.

7. (10) Za koje cijele brojeve p jednadžba

$$\frac{1}{(x-4)^2}-\frac{p-1}{16-x^2}=\frac{p}{(x+4)^2}$$

ima jedinstveno cjelobrojno rješenje?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2013.

1. (6) Koliko ima prirodnih brojeva $n < 2013$ za koje je $(i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + \ldots + i^{n+2012})^{2013}$ prirodan broj?

2. (6) Cvjetnjak kružnog oblika podijeljen je trima tetivama na četiri dijela. Tetive zatvaraju pravokutan trokut kojemu je jedan kut $30°$. U svaki je dio posađena druga vrsta cvijeća – maćuhice, tulipani, narcise i ruže. U dio s najmanjom površinom posađene su ruže. Odredite koliku površinu zauzimaju ruže ako je duljina najmanje tetive 6 m.

3. (6) Riješite sustav jednadžbi:

$$
\begin{aligned}
x + y + \sqrt{x+y} &= 6 \\
x - y + \sqrt{x-y} &= 2
\end{aligned}
$$

4. (6) Odredite sve realne brojeve a takve da je $a(x^2+3) - x(x+2a) > 2$ za svaki realni broj x.

5. (6) U pravokutnom su trokutu iz vrha pravog kuta povučene visina i težišnica. Omjer njihovih duljina iznosi $12 : 13$. Odredite u kojem su omjeru katete tog trokuta.

6. (10) Odredite sve vrijednosti realnog parametra $p \neq 0$ tako da za rješenja jednadžbe $px(x+2) + 2p = 3$ vrijedi $|x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3| \geq 6$.

7. (10) Tri biciklističke staze kojima je ukupna duljina 24 km tvore pravokutni trokut. Iz vrha pravog kuta istovremeno kreću dva biciklista konstantnim brzinama. Jedan vozi po jednoj, a drugi po drugoj stazi. Dok jedan biciklist prijeđe 5.5 km, drugi za to vrijeme prijeđe 6.5 km. Ako se biciklisti sastanu točno na sredini hipotenuze, koliko iznose duljine staza, odnosno stranica pravokutnog trokuta?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2013.

1. (6) Riješite jednadžbu

$$\left(4-\frac{x}{2013}\right)^{10^{2013}}=\left(\frac{x}{671}\right)^{10^{2013}}.$$

2. (6) Duljine stranica trokuta su tri uzastopna neparna broja, a mjera jednog kuta iznosi $\frac{2\pi}{3}$. Izračunajte duljine stranica tog trokuta.

3. (6) Koliko je $f\left(\frac{\pi}{32}\right)$ ako je $f(x)=\frac{\sin 12x}{\sin 4x}+\frac{\cos 12x}{\cos 4x}$?

4. (6) Helena je na svoju rođendansku zabavu pozvala određen broj djece. Broj godina jednog djeteta iznosio je jednu osminu zbroja godina preostale djece. Taj se odnos godina nije mijenjao niti kasnijih godina. Koliko je djece bilo na zabavi?

5. (6) Riješite nejednadžbu $x\cos x-1<x-\cos x$.

6. (10) U pravilni peterokut upisan je kvadrat tako da mu je jedna stranica paralelna s nekom stranicom peterokuta. Dokažite da je duljina stranice kvadrata jednaka $\frac{a\operatorname{ctg}18^\circ}{1+2\cos 18^\circ}$ gdje je a duljina stranice peterokuta.

7. (10) Koju najveću vrijednost može imati površina trokuta kojemu je opseg 20 cm, a duljina jedne stranice 8 cm?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2013.

1. (6) Ani nedostaje 2900 eura za kupovinu novog automobila. Odlučila je štedjeti. Prvi je mjesec izdvojila od džeparca 50 eura. Svaki će naredni mjesec izdvajati 10 eura više. Koliko dugo Ana treba štedjeti da bi sakupila potreban iznos?

2. (6) Mala poluos, linearni ekscentricitet i velika poluos elipse, tri su uzastopna člana aritmetičkog niza. Ako veliku poluos povećamo za 1 niz će postati geometrijski. Odredite jednadžbu elipse.

3. (6) Koliko racionalnih članova ima u razvoju binoma $(\sqrt{2013}+\sqrt[3]{2013})^{2012}$?

4. (6) Odredite jednadžbu kružnice kojoj je središte na osi apscisa, polumjer $5\sqrt{10}$, a na pravcu $3x-4y+24=0$ odsjeca tetivu duljine 10.

5. (6) Odredite sve prirodne brojeve n za koje su istovremeno 2^n-1 i 2^n+1 prosti brojevi.

6. (10) Riješite nejednadžbu

$$0.2^{\cos 2x}-\frac{1}{25^{\cos^2 x}}>4\cdot 125^{-\frac{1}{2}}, \quad x\in[0,2\pi].$$

7. (10) Vektori $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ i $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$ određuju paralelogram. Pri tome su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori, a mjera kuta kojeg $\vec{m}$ i $\vec{n}$ zatvaraju iznosi $\frac{\pi}{3}$. Odredite površinu paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.