Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

14. veljače 2012.

1. (4) Izračunajte $\dfrac{1234321234321 \cdot 2468642468641 - 1234321234320}{1234321234320 \cdot 2468642468641 + 1234321234321}$.

2. (4) Napišite kao potenciju s bazom 5:

$$3\left(5^n - 5\right)\left(5^n + 5\right) + 2\left(25 + 5^{2n}\right) + 25^{n+1} : 5^{2n}.$$

3. (4) Škola je raspisala natječaj za najbolje uređenu učionicu. Iznos novčane nagrade će raspodijeliti na četiri prvoplasirana odjeljenja tako da prvoplasirani dobije 40% ukupnog iznosa, drugoplasirani $\frac{1}{3}$ ukupnog iznosa, trećeplasirani $\frac{5}{8}$ od preostalog iznosa nagrade, a četvrti 1500 kn. Odredite ukupni novčani iznos nagrade te iznos nagrade za svako od prva tri mjesta.

4. (4) Zadan je broj 123456789. Koliko najmanje znamenaka treba izbrisati da novi broj bude djeljiv s 36? Koje su to znamenke?

5. (4) Jednakokračni trapez, koji nema pravih kutova, podijeljen je dijagonalom na dva jednakokračna trokuta. Odredite kutove trapeza.

6. (10) U ovisnosti o realnom parametru m, odredite rješenje x jednadžbe

$$(m + x)^2 - (x - 3)^2 = x\left(3 + m^2\right).$$

7. (10) Odredite sve prirodne brojeve n za koje je razlomak $\dfrac{6n^2 - 10n - 12}{3n - 5}$ prirodan broj.

8. (10) Na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ dane su točke P i Q takve da je $\overline{BP} : \overline{PC} = \overline{CQ} : \overline{QD} = 1 : 3$. Ako je duljina stranice kvadrata a, odredite duljinu najveće i najmanje visine trokuta APQ.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

14. veljače 2012.

1. (4) Izračunajte:

$$\left[\frac{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}\right]^{2012}$$

2. (4) U kružnici polumjera $r = 10$ cm povučene su dvije paralelne tetive duljina 16 cm i 12 cm. Ako se središte kružnice nalazi unutar trapeza kojemu su te tetive osnovice, izračunajte opseg trapeza.

3. (4) Izračunajte površinu lika kojeg u kompleksnoj ravnini određuje skup svih kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $|\operatorname{Re} z| \leq 1$, $|\operatorname{Im} z| \leq 1$.

4. (4) Neka je $f(x) = x^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$. Ako je $f(0) + f(1) = \frac{1}{2}$, izračunajte $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

5. (4) Odredite sve prirodne brojeve m tako da jednadžba $|x^2 - 5x + 4| = m$ ima točno četiri različita realna rješenja.

6. (10) Odredite sve kvadratne jednadžbe oblika $x^2 + px + q = 0$ ako za koeficijente $p, q \in \mathbb{R}$ vrijedi $|p - q| = 2012$, a zbroj kvadrata njezinih rješenja iznosi 2012^2.

7. (10) Danas je Valentinovo i Valentino želi izaći sa svojom djevojkom Lornom. Za svoj džeparac od 120 kuna može kupiti nekoliko ruža i dvije limunade. Cijena jedne ruže jednaka je cijeni jedne limunade. Kako sutra pišu test iz matematike, izlazak će ipak odgoditi do subote. U subotu će se cijena jedne ruže smanjiti za 7 kuna. Valentino želi kupiti isti broj ruža, a umjesto limunade želi kupiti jumbo pizzu i coca colu, kojima je ukupna cijena 78 kn. No tada bi mu nedostajalo 6 kuna. Koliko će ruža Valentino kupiti Lorni? Po kojoj će cijeni kupovati ruže u subotu?

8. (10) Jednakokračnom trokutu ABC s osnovicom duljine 18 cm i krakom duljine 41 cm upišite jednakokračan trokut DEF maksimalne površine, tako da su osnovice dvaju trokuta paralelne, a da je vrh upisanog trokuta u polovištu osnovice zadanog. Odredite duljine stranica trokuta DEF.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

14. veljače 2012.

1. (4) Riješite nejednadžbu
$$2012^{2x} - 2012^{x} - 2011 \cdot 2012 \geq 0.$$

2. (4) Odredite sva rješenja jednadžbe
$$\frac{1}{2}\sin 2x - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$$

3. (4) Odredite temeljni period funkcije $f(x) = 8\sin^2 x \cos^2 x - 2\cos^2 2x$.

4. (4) Koliko ima jednakokračnih trokuta kojima su duljine stranica cjelobrojne, a opseg jednak 30 cm?

5. (4) Bačva ima oblik uspravnog valjka kojemu je os u horizontalnom položaju, a duljina polumjera osnovke 2 dm, te duljina visine 6 dm. Bačva je uronjena u vodu do polovine polumjera osnovke. Izračunajte obujam uronjenog dijela bačve.

6. (10) Površina pravokutnika iznosi 12 cm^2, a ako se šiljasti kut između njegovih dijagonala smanji na pola, površina iznosi 7.5 cm^2. Koliko iznosi duljina dijagonale pravokutnika?

7. (10) Riješite sustav jednadžbi
$$x = 2^{\frac{4}{1+\log_2 z}}$$
$$y = 2^{\frac{4}{1+\log_2 x}}$$
$$z = 2^{\frac{9}{1+\log_2 y}}$$

8. (10) Dokažite da u pravokutnom trokutu s katetama a i b, te redom nasuprotnim kutovima α i β, $a > b$, vrijedi
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

14. veljače 2012.

1. (4) Riješite jednadžbu
$$\frac{1}{(2n-4)!}=\frac{1}{(2n-3)!}+\frac{8}{(2n-2)!}.$$

2. (4) Za koje vrijednosti realnog broja x u razvoju binoma $\left(\sqrt{5^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{25^x}}\right)^6$ treći član iznosi 75?

3. (4) Je li broj $\sqrt{6-4\sqrt{2}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ racionalan? Dokažite.

4. (4) U kružni isječak upisan je krug. Izračunajte omjer površina kružnog isječka i upisanog kruga, ako je omjer njihovih polumjera $3:1$.

5. (4) Neka je $z=-\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}$ kompleksan broj. Odredite najmanji prirodan broj n tako da realni dio broja z^n iznosi 0.

6. (10) Odredite jednadžbe svih tangenti elipse $x^2+4y^2=20$ kojima dirališta raspolovljavaju odsječak koji na tim tangentama odsijecaju koordinatne osi. Izračunajte površinu četverokuta kojeg određuju te tangente.

7. (10) Odredite sve cijele brojeve a, b i c tako da vrijedi $c=(a+bi)^3-7i$.

8. (10) Ako za duljine stranica trokuta vrijedi $a-b=b-c\geq 0$, dokažite da drugi po veličini kut nije veći od 60°. Kada će taj kut biti jednak 60°?